

# Números complejos

Susana Puddu

**1. El plano complejo.** En el conjunto  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definimos la suma y el producto de dos elementos de  $\mathbb{C}$  de la siguiente manera

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Dejamos como ejercicio verificar que estas operaciones son asociativas y conmutativas, que  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  son los elementos neutros para la suma y el producto respectivamente, que  $(-a, -b)$  es el inverso aditivo de  $(a, b)$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{C}$  y que vale la propiedad distributiva, es decir,  $z \cdot (w_1 + w_2) = z \cdot w_1 + z \cdot w_2$  para todo  $z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ .

Además, todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq (0, 0)$  tiene un inverso multiplicativo, es decir, existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $z \cdot w$  es igual al elemento neutro del producto. En efecto, si  $z = (a, b)$  con  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$  entonces  $a^2 + b^2 \neq 0$  y vale  $(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$ . Por lo tanto  $w = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$  es el inverso multiplicativo de  $z$ .

Notemos que, por la definición de suma y producto,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Luego, denotando por  $i$  al elemento  $(0, 1)$  resulta que  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ . Ahora, identificando los elementos de la forma  $(a, 0)$  (es decir, que tiene segunda coordenada nula) con el número real  $a$ , de lo anterior resulta que  $(a, b) = a + bi$  donde  $i^2 = -1$ .

Luego,  $\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}\}$  donde  $i^2 = -1$  y la suma y el producto se traducen en

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Además los elementos neutros para la suma y el producto son 0 y 1 respectivamente, el inverso aditivo de  $z = a + bi$  es  $-z = -a - bi$  y, si  $z \neq 0$ , su inverso multiplicativo es  $z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ .

Llamaremos *números complejos* a los elementos de  $\mathbb{C}$  y llamaremos *forma binómica* a la escritura de un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  en la forma  $z = a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Con esta escritura puede verse a  $\mathbb{R}$  como un subconjunto de  $\mathbb{C}$ :  $\mathbb{R} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} / b = 0\}$ .

Dado  $z = a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  diremos que  $a$  es la *parte real* de  $z$  y que  $b$  es la *parte imaginaria* de  $z$  y escribiremos  $a = \text{Re}(z)$ ,  $b = \text{Im}(z)$ . Notemos que la parte real y la parte imaginaria de un número complejo son números reales. Además, dados  $z, w \in \mathbb{C}$  se tiene que  $z = w$  si y sólo si  $\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$  e  $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$ .

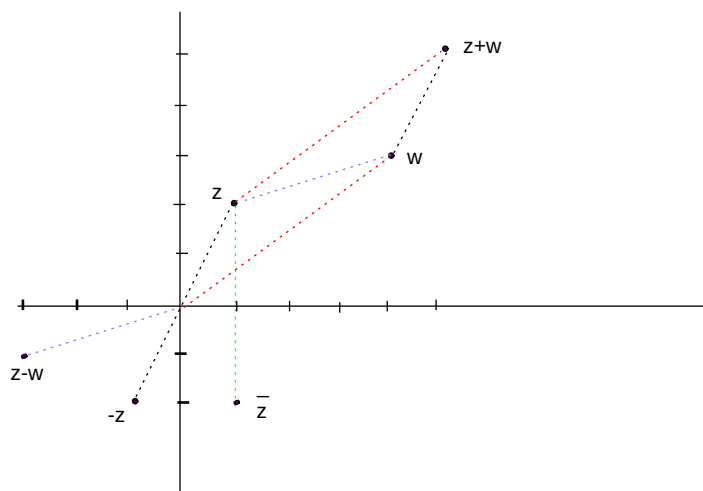
Dado  $z = a + bi$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , definimos el *conjugado* de  $z$  como el número complejo  $\bar{z} = a - bi$  y definimos el *módulo* de  $z$  como el número real no negativo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Observemos que  $|z| = 0$  si y sólo si  $z = 0$  y que, si  $z \neq 0$ , entonces el inverso de  $z$  respecto del producto es  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . Notemos además que  $|z|$  es la distancia del número complejo  $z = (a, b)$  al origen de coordenadas  $(0, 0)$ . En general, si  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $|z - w|$  es la distancia de  $z$  a  $w$ .

**Observación.** Si  $a \in \mathbb{R}$  entonces el módulo de  $a$  visto como número complejo es igual a

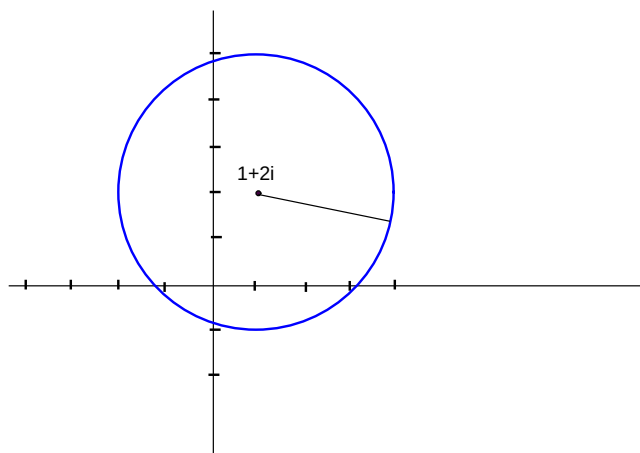
$$\sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

es decir, coincide con el valor absoluto de  $a$  visto como número real. Por lo tanto la notación  $|a|$  no es ambigua.

**Ejemplos.** 1) Grafiquemos en el plano complejo  $z = 1 + 2i$ ,  $w = 4 + 3i$ ,  $-z$ ,  $\bar{z}$ ,  $z + w$  y  $z - w$ .



2) Grafiquemos en el plano complejo  $\{z \in \mathbb{C} / |z - (1 + 2i)| = 3\}$ . Este es el conjunto de los  $z$  cuya distancia a  $1 + 2i$  es igual a 3, es decir, la circunferencia de centro en  $(1, 2)$  y radio 3.



3) Hallar todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $2i\bar{z} = |z + 2i|$ .

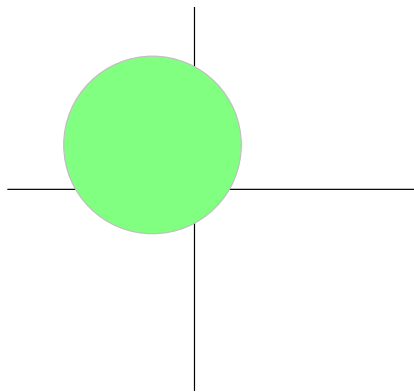
Sean  $a = \operatorname{Re}(z)$  y  $b = \operatorname{Im}(z)$ . Entonces  $z = a + bi$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Luego,  $\bar{z} = a - bi$  y  $z + 2i = a + (b + 2)i$ . Por lo tanto

$$2i\bar{z} = |z + 2i| \iff 2i(a - bi) = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2} \iff 2b + 2ai = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2}$$

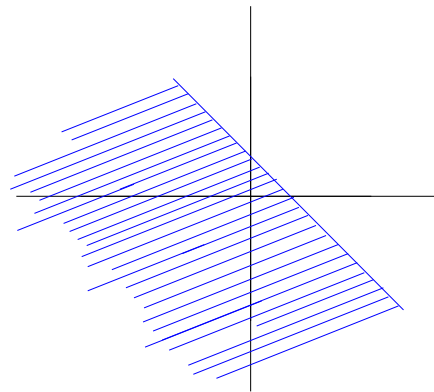
Luego,  $a = 0$  y  $2b = \sqrt{(b + 2)^2}$  de donde resulta que  $a = 0$ ,  $b \geq 0$  y  $2b = b + 2$ . Por lo tanto  $a = 0$  y  $b = 2$ . Luego, hay un único  $z \in \mathbb{C}$  que satisface lo pedido,  $z = 2i$ .

4) Grafiquemos el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} / |z + 1 - i| \leq 2 \text{ y } \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$ .

Primero graficamos los  $z$  que satisfacen cada una de las condiciones por separado. Los  $z / |z - (-1 + i)| \leq 2$  es el círculo de centro en  $-1 + i$  y radio 2, los  $z / \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 1$  es el semiplano determinado por la recta  $x + y = 1$  que contiene al origen.

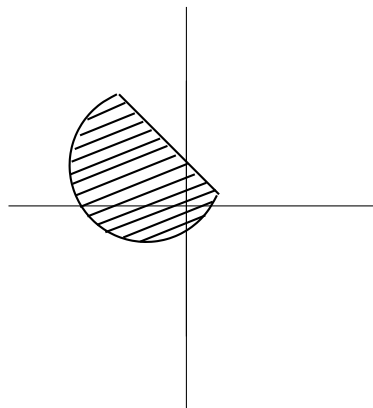


$$|z + 1 - i| \leq 2$$



$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \leq 1$$

Luego, los  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen ambas condiciones simultáneamente son los que pertenecen a la intersección:



5) Grafiquemos el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} / |z - 1| = |z + i|\}$

Este conjunto está formado por todos los números complejos  $z$  cuya distancia a 1 es igual a su distancia a  $-i$ .

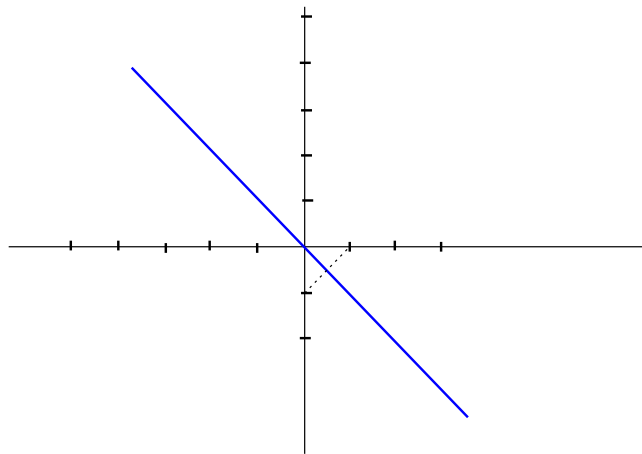
Primero hallemos los  $z$  que satisfacen lo pedido. Como  $|z - 1|$  y  $|z + i|$  son números reales no negativos entonces

$$|z - 1| = |z + i| \iff |z - 1|^2 = |z + i|^2$$

Luego, si  $z = a + bi$  entonces

$$|z - 1| = |z + i| \iff (a - 1)^2 + b^2 = a^2 + (b + 1)^2 \iff -2a = 2b \iff a = -b$$

Por lo tanto los  $z$  que satisfacen lo pedido son los que pertenecen a la recta  $x = -y$ . Notar que esta es la recta perpendicular al segmento que une 1 con  $-i$  y pasa por el punto medio de dicho segmento.



**Propiedades.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Entonces se verifican

- i)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- ii)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- iii)  $\overline{\bar{z}} = z$
- iv)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$  y  $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z) \cdot i$
- v)  $z \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $z = \bar{z}$
- vi) si  $z \neq 0$  entonces  $(\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$
- vii)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- viii)  $|\bar{z}| = |z|$
- ix)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  y  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- x)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- xi)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (desigualdad triangular)
- xii) si  $z \neq 0$  entonces  $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

*Demostración:* Sólo demostraremos vi), ix) y xi) y dejamos la demostración de las restantes propiedades como ejercicio.

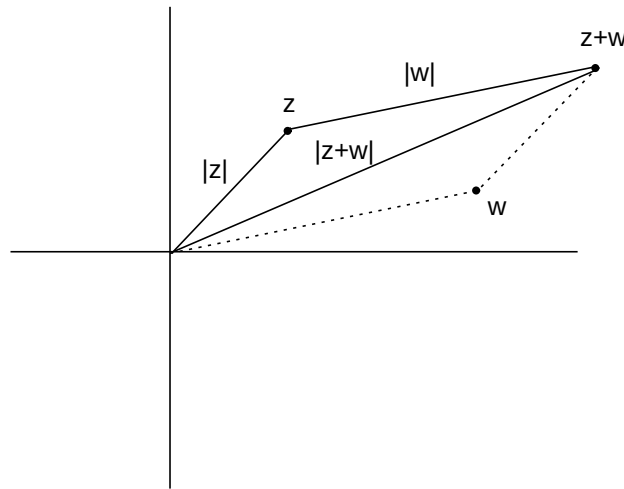
vi) Debemos ver que el inverso multiplicativo de  $\bar{z}$  es  $\overline{z^{-1}}$ , es decir, debemos ver que  $\bar{z}.z^{-1} = 1$ . Usando ii) se tiene que  $\bar{z}.z^{-1} = \overline{z.z^{-1}} = \overline{1} = 1$ .

ix) Sea  $z = a + bi$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces, como ambos miembros de la desigualdad son números reales no negativos resulta que

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \iff |\operatorname{Re}(z)|^2 \leq |z|^2 \iff a^2 \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq b^2$$

cosa que ocurre pues  $b \in \mathbb{R}$ . De manera análoga se ve que  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .

xi) Veremos que  $|z + w| \leq |z| + |w|$ . Gráficamente la desigualdad significa que en un triángulo la longitud de un lado es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos:



Probemos la desigualdad. Como  $|z + w|$  y  $|z| + |w|$  son números reales no negativos entonces

$$|z + w| \leq |z| + |w| \iff |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \iff |z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|.|w|$$

y usando ahora las propiedades anteriores resulta que

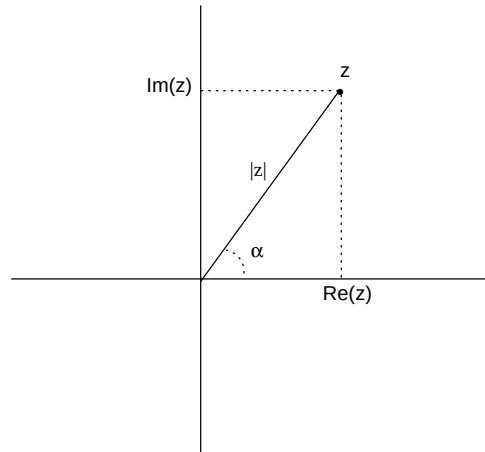
$$\begin{aligned} |z + w| \leq |z| + |w| &\iff (z + w).(\overline{z + w}) \leq z.\bar{z} + w.\bar{w} + 2|z|.|w| \iff \\ &\iff (z + w).(\bar{z} + \bar{w}) \leq z.\bar{z} + w.\bar{w} + 2|z|.|w| \iff \\ &\iff z.\bar{z} + w.\bar{w} + z.\bar{w} + w.\bar{z} \leq z.\bar{z} + w.\bar{w} + 2|z|.|w| \iff \\ &\iff z.\bar{w} + w.\bar{z} \leq 2|z|.|w| \iff z.\bar{w} + \overline{z.\bar{w}} \leq 2|z|.|\bar{w}| \iff \\ &\iff 2\operatorname{Re}(z.\bar{w}) \leq 2|z.\bar{w}| \end{aligned}$$

lo que es verdadero por ix).  $\square$

**Ejercicio.** Usando la desigualdad triangular, demostrar que para todo  $z, w \in \mathbb{C}$  vale  $||z| - |w|| \leq |z - w|$ . (Sugerencia:  $|z| = |(z - w) + w|$ ).

## 2. Forma trigonométrica.

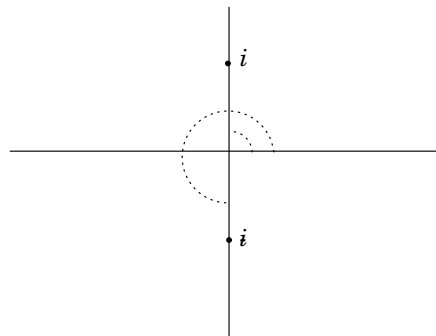
Dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , existe un único ángulo  $\alpha \in [0, 2\pi)$  tal que  $\cos \alpha = x = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$  y  $\operatorname{sen} \alpha = y = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$ . Diremos que  $\alpha$  es el *argumento* de  $z$  y escribiremos  $\alpha = \arg(z)$ .



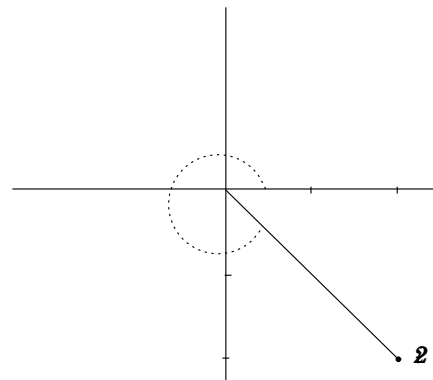
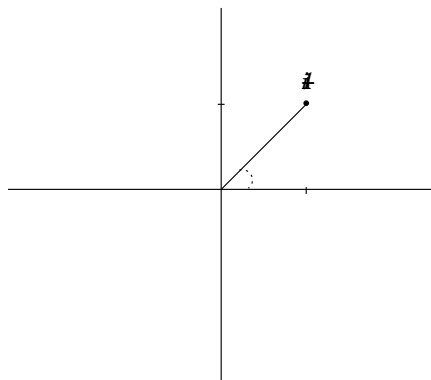
El argumento de  $z$  es el ángulo que forma el segmento que une  $z$  con el origen y el eje  $x$  positivo.

**Ejemplos.** 1) Si  $z = r$ , con  $r \in \mathbb{R}$  entonces  $\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \pi & \text{si } r < 0 \end{cases}$

2) Si  $z = i$  entonces  $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$  y si  $z = -i$  entonces  $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$



3) Si  $z = 1 + i$  entonces  $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$  y si  $z = 2 - 2i$  entonces  $\arg(z) = \frac{7\pi}{4}$



**Observaciones.** i) Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . Si  $\alpha = \arg(z)$  entonces  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Esta expresión se llama la *forma trigonométrica* de  $z$ .

ii) Si  $z = r(\cos \beta + i \sin \beta)$  con  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  entonces  $r = |z|$  y  $\beta = \arg(z) + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Notar que si además  $\beta \in [0, 2\pi)$  entonces debe ser  $\beta = \arg(z)$ .

iii) Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  no nulos,  $z = w$  si y sólo si  $|z| = |w|$  y  $\arg(z) = \arg(w)$ .

*Demostración:* i)  $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i = |z| \left( \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} + \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}i \right) = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

ii) Si  $z = r(\cos \beta + i \sin \beta)$  con  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  entonces  $\operatorname{Re}(z) = r \cos \beta$  e  $\operatorname{Im}(z) = r \sin \beta$ .  
Luego

$$|z| = |r| \cdot |(\cos \beta + i \sin \beta)| = r \cdot \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} = r \cdot \sqrt{1} = r$$

Además, si  $\alpha = \arg(z)$  entonces

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{r} = \cos \beta \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{r} = \sin \beta$$

Luego,  $\cos \alpha = \cos \beta$  y  $\sin \alpha = \sin \beta$  de donde  $\beta = \alpha + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$

iii) Es consecuencia inmediata de i).  $\square$

Notar que, por las observaciones anteriores, un número complejo  $z$  no nulo queda determinado conociendo  $|z|$  y  $\arg(z)$ .

**Ejemplos.** Hallemos el módulo y el argumento de  $z$  en los casos

i)  $z = 5i$

ii)  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

iii)  $z = 1 + \sqrt{3}i$

i) Si  $z = 5i$  entonces  $|z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$ . Ahora calculemos  $\alpha = \arg(z)$ . Sabemos que  $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = 0$  y  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = 1$ . Luego  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

ii) Si  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$  entonces  $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ . Calculemos  $\alpha = \arg(z)$ . Sabemos que  $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Luego  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

iii) Si  $z = 1 + \sqrt{3}i$  entonces  $|z| = \sqrt{4} = 2$ . Calculemos  $\alpha = \arg(z)$ . Sabemos que  $\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$  y  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Luego  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

### 3. El teorema de De Moivre.

**Teorema.** (De Moivre) Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  no nulos. Entonces  $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración:* Sea  $\alpha = \arg(z)$  y sea  $\beta = \arg(w)$ . Entonces

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$$

Luego,

$$\begin{aligned} z.w &= |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \\ &= |z|.|w| ((\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)) = \\ &= |z.w|(\cos(\alpha + \beta) + i(\operatorname{sen}(\alpha + \beta))) \end{aligned}$$

Luego, por la observación ii),  $\alpha + \beta = \arg(z.w) + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , y por lo tanto  $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Observación.** Notemos que si  $k \in \mathbb{Z}$  satisface  $\arg(z.w) = \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi$  entonces  $k$  debe ser tal que  $0 \leq \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi < 2\pi$ . Luego, el valor de  $k \in \mathbb{Z}$  del teorema anterior queda determinado por esta condición:  $k$  es el único entero que satisface  $0 \leq \arg(z) + \arg(w) - 2k\pi < 2\pi$

**Corolario 1.** Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , y sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\arg(z^n) = n \arg(z) - 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Dejamos la demostración como ejercicio. Sugerencia: usar el principio de inducción.

**Corolario 2.** Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . Entonces  $\arg(z^{-1}) = -\arg(z) + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Dejamos la demostración como ejercicio. Sugerencia:  $z.z^{-1} = 1$ .

**Corolario 3.** Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  y sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\arg(z^m) = m \arg(z) - 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego, si  $\alpha = \arg(z)$ , entonces  $z^m = |z|^m (\cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha)$ .

Dejamos la demostración como ejercicio.

**Observación.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , ambos no nulos. Si  $z = r.w$  con  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , entonces  $\arg(z) = \arg(r) + \arg(w) - 2k\pi = \arg(w) - 2k\pi$  pues  $\arg(r) = 0$ . Y como  $0 \leq \arg(w) < 2\pi$  entonces debe ser  $k = 0$ . Luego, como  $\bar{z} = |z|^2.z^{-1}$ , entonces  $\arg(\bar{z}) = \arg(z^{-1})$ . Por lo tanto,  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Ejemplos.

1) Hallemos los argumentos de  $-1 - \sqrt{3}i$ ,  $1 - \sqrt{3}i$  y  $-1 + \sqrt{3}i$ .

Sea  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Vimos antes que  $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ . Luego

$$\arg(-1 - \sqrt{3}i) = \arg(-z) = \arg(-1) + \arg(z) - 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{3} - 2k\pi$$

donde  $k$  es el único entero que satisface  $0 \leq \pi + \frac{\pi}{3} - 2k\pi < 2\pi$ . Entonces  $k = 0$  y por lo tanto  $\arg(-1 - \sqrt{3}i) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Análogamente,

$$\arg(1 - \sqrt{3}i) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donde  $k$  es el único entero que satisface  $0 \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ . Entonces  $k = 1$  y por lo tanto  $\arg(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

Finalmente,

$$\arg(-1 + \sqrt{3}i) = \arg(-\bar{z}) = \arg(-1) + \arg(\bar{z}) - 2k\pi = \pi + \frac{5\pi}{3} - 2k\pi$$

donde  $k$  es el único entero que satisface  $0 \leq \pi + \frac{5\pi}{3} - 2k\pi < 2\pi$ . Entonces  $k = 1$  y por lo tanto  $\arg(-1 + \sqrt{3}i) = \pi + \frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

2) Hallemos  $(1 + i)^{3523}$

Como  $|1 + i| = \sqrt{2}$  y  $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$  entonces  $|(1 + i)^{3523}| = |1 + i|^{3523} = 2^{1761}\sqrt{2}$  y, por el corolario 3,

$$\begin{aligned} \arg((1 + i)^{3523}) &= 3523 \arg(1 + i) - 2k\pi = \frac{3523\pi}{4} - 2k\pi = \\ &= \frac{(8.440 + 3)\pi}{4} - 2k\pi = 2.440\pi + \frac{3\pi}{4} - 2k\pi \end{aligned}$$

donde  $k$  es el único entero que satisface  $0 \leq 2.440\pi + \frac{3\pi}{4} - 2k\pi < 2\pi$ . Luego  $k = 440$  y por lo tanto  $\arg((1 + i)^{3523}) = \frac{3\pi}{4}$ .

Luego,  $(1 + i)^{3523} = 2^{1761}\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sen \frac{3\pi}{4}) = 2^{1761}\sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 2^{1761}(-1 + i)$

#### 4. Raíces enésimas de un número complejo.

Primero veremos un ejemplo y luego veremos el caso general.

**Ejemplo.** Hallemos las raíces cuartas de  $1 + \sqrt{3}i$ , es decir, todos los  $z \in \mathbb{C}$  tales que  $z^4 = 1 + \sqrt{3}i$ .

Observemos que  $z = 0$  no es solución. Dado  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} z^4 = 1 + \sqrt{3}i &\iff |z^4| = |1 + \sqrt{3}i| \text{ y } \arg(z^4) = \arg(1 + \sqrt{3}i) \iff \\ &\iff |z|^4 = 2 \text{ y } 4\arg(z) - 2k\pi = \frac{\pi}{3} \iff |z| = \sqrt[4]{2} \text{ y } \arg(z) = \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} \end{aligned}$$

donde  $k$  debe satisfacer  $0 \leq \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} < 2\pi$ . Luego,  $k = 0, 1, 2$  o  $3$ . Por lo tanto, las raíces cuartas de  $1 + \sqrt{3}i$  son

$$z_0 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sen \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sen \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{12} + i \sen \frac{13\pi}{12} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sen \frac{19\pi}{12} \right)$$

Veamos ahora el caso general: sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $z_0 \neq 0$  y sea  $n \in \mathbb{N}$ . Queremos hallar todos los  $w \in \mathbb{C}$  tales que  $w^n = z_0$ . Sea  $r = |z_0|$  y sea  $\alpha = \arg(z_0)$ .

Como antes,  $w = 0$  no es solución pues  $z_0 \neq 0$ . Dado  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} w^n = z_0 &\iff |w^n| = |z_0| \text{ y } \arg(w^n) = \arg(z_0) \iff \\ &\iff |w|^n = r \text{ y } n \arg(w) - 2k\pi = \alpha \iff |w| = \sqrt[n]{r} \text{ y } \arg(w) = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{aligned}$$

donde  $k$  debe satisfacer  $0 \leq \frac{\alpha + 2k\pi}{n} < 2\pi$ . Luego,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Por lo tanto, las raíces enésimas de  $z_0$  son

$$w_k = \sqrt[n]{|z_0|} \left( \cos \frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg(z_0) + 2k\pi}{n} \right)$$

donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Dejamos como ejercicio verificar que estas  $n$  soluciones son todas distintas.

**Ejemplo.** Las raíces quintas de  $z_0 = -2i$  son

$$w_0 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} \right)$$

$$w_1 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{10} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{10} \right)$$

$$w_3 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{15\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{15\pi}{10} \right)$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{10} \right)$$

pues  $|z_0| = 2$  y  $\arg(z_0) = \frac{3\pi}{2}$ .

## 5. Raíces enésimas de la unidad.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Cuando  $z_0 = 1$ , se tiene que  $|z_0| = 1$  y  $\arg(z_0) = 0$ . Luego, aplicando lo anterior obtenemos las raíces enésimas de la unidad, que son

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \quad (0 \leq k < n)$$

Denotaremos por  $G_n$  al conjunto de raíces enésimas de 1, es decir,

$$G_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} / 0 \leq k < n \right\}$$

**Ejercicio.** Verificar que

i)  $G_2 = \{1, -1\}$

ii)  $G_3 = \{1, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

iii)  $G_4 = \{1, i, -1, -i\}$

iv)  $G_6 = \{1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

**Ejercicio.** Sea  $z \in G_n$  y sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Probar que si  $m = nq + r$  entonces  $z^m = z^r$ .

**Ejercicio.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que

i) Si  $z, w \in G_n$  entonces  $z.w \in G_n$

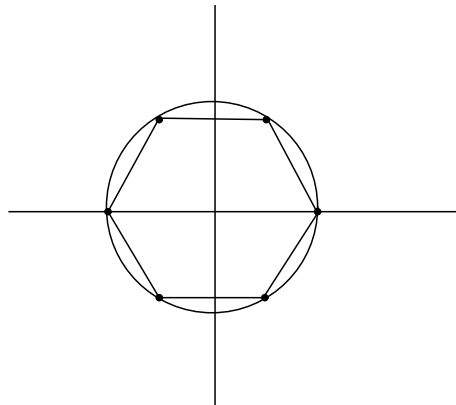
ii)  $1 \in G_n$

iii) Si  $z \in G_n$  entonces  $z^{-1} \in G_n$

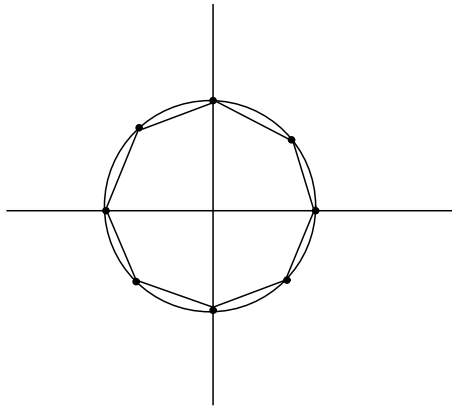
iv) Si  $z \in G_n$  entonces  $\bar{z} \in G_n$

v) Si  $z \in G_n$  entonces  $\bar{z}^k = z^{-k} = z^{n-k}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Observación.** Las raíces enésimas de 1 son los vértices de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en la circunferencia de centro cero y radio 1. Por ejemplo, para  $n = 6$ , las raíces sextas de la unidad son  $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  que son los vértices de un hexágono regular inscrito en la circunferencia de centro cero y radio 1



Las raíces octavas de la unidad son  $1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i$  y  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  que son los vértices de un octógono regular inscrito en la circunferencia de centro cero y radio 1



**Observación.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \in G_n$ . Entonces, por el corolario 3 del teorema de De Moivre,  $w_1^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ . Luego

$$G_n = \{w_1^k / 0 \leq k < n\}$$

Diremos que  $w \in \mathbb{C}$  es una *raíz enésima primitiva de la unidad* si  $w \in G_n$  y  $\forall z \in G_n \exists r \in \mathbb{N}$  tal que  $z = w^r$ .

**Ejercicio.** Sea  $w \in \mathbb{C}$ . Probar que  $w$  es una raíz enésima primitiva de la unidad si y sólo si  $G_n = \{w^k / 0 \leq k < n\}$ .

**Ejemplos.**

- 1)  $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  es una raíz enésima primitiva de la unidad para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Las raíces cúbicas primitivas de la unidad son  $w_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $w_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 3) Las raíces cuartas primitivas de la unidad son  $w_1 = i$  y  $w_3 = -i$
- 4) Las raíces sextas primitivas de la unidad son  $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  y  $w_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 5) Las raíces octavas primitivas de la unidad son  $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $w_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $w_5 = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  y  $w_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

**Ejercicio.** Probar que  $w \in G_n$  es una raíz enésima primitiva de la unidad si y sólo si  $w^n = 1$  y  $w^k \neq 1$  para todo  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n-1$

**Observación.** Sea  $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \in G_n$ . Entonces  $w_k = w_1^k$ . Si  $d = (k : n)$  entonces  $\frac{k}{d}$  y  $\frac{n}{d}$  son enteros y

$$w_k^{\frac{n}{d}} = (w_1^k)^{\frac{n}{d}} = (w_1^n)^{\frac{k}{d}} = 1^{\frac{k}{d}} = 1$$

Luego, si  $d \neq 1$  entonces  $w_k$  no puede ser una raíz enésima primitiva.

**Ejercicio.** Probar que  $w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$  es una raíz enésima primitiva de la unidad si y sólo si  $k$  y  $n$  son coprimos.

**Observación.** Sea  $w$  una raíz enésima primitiva de 1. Luego  $G_n = \{1, w, w^2, \dots, w^{n-1}\}$  y como  $w^n = 1$  entonces

$$\sum_{z \in G_n} z = \sum_{j=0}^{n-1} w^j = \frac{w^n - 1}{w - 1} = 0$$

**Ejemplos.** 1) Calculemos la suma de las raíces onceavas primitivas de la unidad.

Sea  $w_k = \cos \frac{2k\pi}{11} + i \sin \frac{2k\pi}{11}$  ( $0 \leq k < 11$ ). Entonces  $G_{11} = \{1, w_1, w_2, \dots, w_{10}\}$  y las raíces primitivas son  $w_1, w_2, \dots, w_{10}$ . Luego, la suma de las raíces onceavas primitivas de la unidad es

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{10} = 1 + w_1 + w_2 + \dots + w_{10} - 1 = \sum_{z \in G_{11}} z - 1 = 0 - 1 = -1$$

2) Calculemos la suma de las raíces 35-avas primitivas de la unidad.

Sea  $w_k = \cos \frac{2k\pi}{35} + i \sin \frac{2k\pi}{35}$  ( $0 \leq k < 35$ ). Entonces  $G_{35} = \{1, w_1, w_2, \dots, w_{34}\}$  y las raíces primitivas son todas menos  $w_0, w_5, w_{10}, w_{15}, w_{20}, w_{25}, w_{30}, w_7, w_{14}, w_{21}$  y  $w_{28}$ . Notando que

$$w_{5q} = \cos \frac{2.5q\pi}{35} + i \sin \frac{2.5q\pi}{35} = \cos \frac{2q\pi}{7} + i \sin \frac{2q\pi}{7}$$

y

$$w_{7q} = \cos \frac{2.7q\pi}{35} + i \sin \frac{2.7q\pi}{35} = \cos \frac{2q\pi}{5} + i \sin \frac{2q\pi}{5}$$

se tiene que  $\{w_0, w_5, w_{10}, w_{15}, w_{20}, w_{25}, w_{30}\} = G_7$  y  $\{w_0, w_7, w_{14}, w_{21}, w_{28}\} = G_5$ . Luego, la suma de las raíces 35-avas primitivas de la unidad es

$$\sum_{z \in G_{35}} z - \sum_{z \in G_5} z - \sum_{z \in G_7} z + w_0 = 1$$