

1	2	3	4
R	B	M	B

CALIFICACIÓN
6

seis

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA/DNI:

Álgebra I - Curso de verano 2025

Primer parcial - 21/02/2025

1. Sea $X = \{f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\} \rightarrow \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 100\}\}$, es decir, X es el conjunto de todas las funciones del conjunto $\{1, \dots, 5\}$ en el conjunto $\{0, \dots, 100\}$. Se define en X la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$f\mathcal{R}g \iff f(4) \equiv g(4) \pmod{3}$$

- a) Decida si la relación es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.
 b) Sea $g \in X$ la función definida por $g(n) = 5$ para todo $n \in \{1, \dots, 5\}$. Calcule la cantidad de funciones inyectivas f tales que $f\mathcal{R}g$ y $f(5) = 14$.

2. Pruebe que la siguiente igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{9} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{n}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1.$$

3. Determine cuántas funciones sobreyectivas $f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\}$ cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- $f(3) \leq f(4) \leq f(5)$,
- $f(1) + f(2)$ es impar.

4. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Calcule todos los posibles valores de $d = (a^2 + a : a^3 + 3a^2 + 2a + 14)$. Para cada posibilidad de d hallada, caracterice todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales se obtiene dicho valor de d .

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas y escriba con claridad.

1)
a) ES REFLEXIVA? SI, YA QUE PARA ESTO TIENE QUE PASAR QUE PARA
 $\forall a \in X$, COMO $f(4)$ ES CONGRUENTE A SÍ MISMO MODULO 3 SEA CUAL
SEA f ENTONCES SIGNIFICA QUE $f R f$

ES SIMETRICA? SI, ~~PARA~~ CADA QUE $f R g \Rightarrow g R f$, Y ESTO SE CUMPLE PORQUE
SI $f R g \Leftrightarrow f(4) \equiv g(4) \pmod{3}$ QUE ES IGUAL A ESCRIBIRLO COMO
 $g(4) \equiv f(4) \pmod{3}$ POR LO QUE $g R f$

ES TRANSITIVA? SI $A R B \wedge B R C \Rightarrow A R C$? ESTO SE CUMPLE YA QUE

$A(4) \equiv B(4) \equiv C(4) \pmod{3}$ Y COMO LA CONGRUENCIA ES
UN OPERACION DE EQUIVALENCIA
PODEMOS SACAR $B(4)$ DEL MEDIO
Y TENEMOS QUE $A R C$.

ES ANTISIMETRICA? $A R B \wedge B R A$ SE DA SI $A = B$? PRUEBO POR CONTRA EJEMPLO

Tomando $f \neq g$

$$f(1) = 1 \quad g(1) = 60$$

$$f(2) = 2 \quad g(2) = 3$$

$$f(3) = 4 \quad g(3) = 7$$

$$f(4) = 3 \quad g(4) = 9$$

$$f(5) = 10 \quad g(5) = 20$$

VEAMOS QUE $f \neq g$

Y $f R g \wedge g R f$ PORQUE

$$f(4) \equiv g(4) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(4) \equiv g(4) \pmod{3}$$

20 - 1 es el.

b) PRIMERO VEO QUE $g(4) \equiv 1 \pmod{3}$ ENTONCES TENGO QUE BUSCAR

f INYECTIVAS QUE $f(4) \equiv 1 \pmod{3}$ LOS $f(4)$ POSIBLES SON LOS NUMEROS
DENTRO DEL CONJUNTO DE LLEGADA QUE SON DE LA FORMA $3K+1$

DIVIDO 100 POR 3 Y VEO QUE HAY 33 MULTIPLOS DE 3 DENTRO DEL
CONJUNTO DE LLEGADA ADemas DEL 0, QUE YO ESTOY CONTANDO LOS $3K+1$
ES EXACTAMENTE EL MISMO NUMERO MAS EL CASO DEL 1 ENTONCES TENEMOS

$$\binom{34}{1}$$

POSIBILIDADES PARA $f(4)$

Y LUEGO TENEMOS QUE RESTAR UN
PASO AL CONJUNTO DE LLEGADA
YA QUE $f(4)$ YA ESTA FIJADO

UNA VEZ FIJADO $f(4)$, TENEMOS QUE VER DONDE VAN EL RESTO
 $f(x)$

$$99$$

$$(99 - 3)$$

CANTO DE
FUNCIONES
INYECTIVAS
SIN $f(4)$ Y
 $f(5) = 94$

CONJUNTO DE LLEGADA ~~NO~~ EL QUE SE ELIGIO PARA $f(4)$
 $\wedge f(5)$

CONJUNTO DE SALIDA AL QUE SE LE RESTO LA POSIBILIDAD
DE $f(4)$ Y $f(5)$

Asamblea

LUEGO TENEMOS

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

POSIBILIDAD
DE $f(5)$
CADA FUNCIÓN

POSIBILIDADES
DE $f(4)$

$$\frac{99!}{(99-3)!}$$

FUNCIONES INY
QUE NO TIENEN
 $f(4) \wedge f(5)$

= FUNCIONES INYECTIVAS
QUE SE RELACIONAN CON G
Y QUE ADemás TIENEN $f(5) = 14$



$f \circ p \Leftrightarrow f(u) \equiv p(u) (3), \text{ o sea, } f(u) - p(u) \equiv 0(3).$

Reflexividad:

$f \circ p \Leftrightarrow f(u) \equiv p(u) (3) \rightarrow$ esto es trivial ya que la función siempre será igual a sí misma para cualquier mod. $\therefore \text{es R}$ ✓

Simetría:

$f \circ p \Leftrightarrow f(u) \equiv p(u) (3)$
 $? \Rightarrow p \circ f \Leftrightarrow p(u) \equiv f(u) (3)$ } estas expresiones son equivalentes, por lo que si ya se que $f \circ p$ se cumple, $p \circ f$ se va a cumplir. ✓

si sumo ambos puedo hacerlo aún más explícito:

$f \circ p \Leftrightarrow f(u) - p(u) \equiv 0(3)$
 $? \Rightarrow p \circ f \Leftrightarrow p(u) - f(u) \equiv 0(3)$ } $\xrightarrow{\text{demostración}} f(u) - p(u) + p(u) - f(u) \equiv 0(3)$
 $\Leftrightarrow 0 \equiv 0(3) \checkmark$ $\therefore \text{es S.}$

Antisimetría:

$f \circ p \Leftrightarrow f(u) \equiv p(u) (3)$
 $p \circ f \Leftrightarrow p(u) \equiv f(u) (3) \Leftrightarrow f = p ?$ } Como $f, p: \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{0, \dots, 200\}$, puedo definir:
 $\left(\begin{array}{l} f(u) = 1 \\ p(u) = 4 \end{array} \right) \rightarrow p(u) \equiv 1(3)$

se van a cumplir ambas relaciones:

$f \circ p \Leftrightarrow 1 \equiv 1(3)$
 $p \circ f \Leftrightarrow 1 \equiv 1(3)$ pero $f \neq p$, aunque sean igual en congruencia.

Hay q' definir los contraejemplos en todo el dominio $\otimes$ $\therefore \text{no es AS}$

Transitividad:

$f \circ p \Leftrightarrow f(u) \equiv p(u) (3)$
 $p \circ h \Leftrightarrow p(u) \equiv h(u) (3)$
 $? \Rightarrow f \circ h \Leftrightarrow f(u) \equiv h(u) (3)$ } por cadena de congruencia, como las primeras dos se cumplen, se que $f \circ h$ también lo hará. ✓
 sumo las expresiones:
 $f \circ p \Leftrightarrow f(u) - p(u) \equiv 0(3)$
 $p \circ h \Leftrightarrow p(u) - h(u) \equiv 0(3)$ } $\xrightarrow{\text{demostración}} f(u) - p(u) + p(u) - h(u) \equiv 0(3)$
 $\Leftrightarrow f(u) - h(u) \equiv 0(3)$

- $F(1) = ? \quad g(1) = ?$
- $F(2) = ? \quad g(2) = ?$
- $F(3) = ? \quad g(3) = ?$
- $F(4) = 1 \quad g(4) = 4$
- $F(5) = ? \quad g(5) = ?$

lo cual es exactamente $f \circ h$. ✓

$\therefore \text{es T}$

b. $p(n) = 5 \quad \forall n \in \{1, \dots, 5\}$. $5 \equiv 2(3) \rightarrow \underline{3k+2}$ ✓

• $f(4) \equiv p(4) \equiv 5 \pmod{3}$ o' $f(4) - p(4) \equiv 0(3)$ ✓

• $f(5) = 14 \equiv 2(3)$ ✓

• Como $p(n) = 5 \equiv 2(3)$ se que las funciones deberán ser congruentes a ese valor. $p/f(4)$

¿Cuántos elem son $\equiv 2(3) \in \{0, \dots, 100\}$? $\therefore 0 \leq 3k+2 \leq 100$

$-2 \leq 3k \leq 98$

$-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{98}{3} \Rightarrow -0,66 \leq k \leq 32,6$ ✓

$$\frac{99}{\cancel{32}} \quad \frac{98}{\cancel{31}} \quad \frac{97}{\cancel{30}} \quad \frac{32}{\cancel{28}} \quad \frac{1}{\cancel{1}} = \frac{32!}{28!}$$

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad f(4) \quad f(5)$$

posibilidades.

Hay 33 elem $\in \{0, \dots, 100\}$ que lo cumplen. *

→ tiene 1 sola posibilidad porque ya me lo dieron definiendo como $f(5) = 14$. ✓

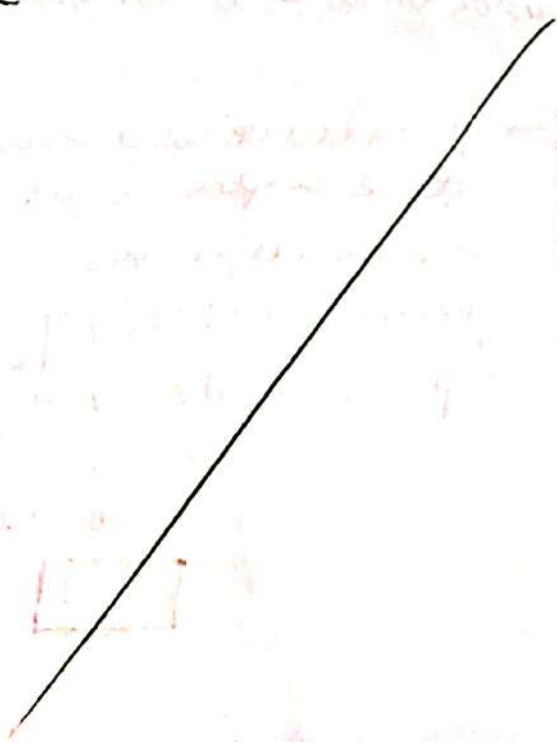
* Debo restar una posibilidad ya que $f(5) = 14$ y cubre una de ellas! como estoy calculando los mof, no deben repetirse valores. ✓

$\therefore$ Hay $\left(\frac{32!}{28!} \right) 4!$ f. inyectivas que cumplen la condición.

permutaciones de $f(1), f(2), f(3), f(4)$ / mof

lo que calculé anteriormente

Rta: $99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 32$



2. $p(h) = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^h k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{h}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^h + 1, \forall h \in \mathbb{N}^4. \checkmark$ HOJA 2

CB: $p(1) \text{ v?}$

$$\frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^1 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} = -\frac{8}{9} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \checkmark$$

PI

HI: $\frac{1}{9} \sum_{k=1}^h k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(-\frac{h}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^h + 1. \text{ p/algún } h \in \mathbb{N}$

APP: $\frac{1}{9} \sum_{k=1}^{h+1} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \underbrace{\left(-\left(\frac{h+1}{3}\right) - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} + 1}_{*} \checkmark$

$$\frac{1}{9} \left[\sum_{k=1}^h k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + (h+1) \left(\frac{2}{3}\right)^h \right] \stackrel{\text{HI}}{\uparrow} \left[\left(-\frac{h}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^h + 1 + \frac{1}{9} \left[(h+1) \left(\frac{2}{3}\right)^h \right] \right]$$

Empiezo un poco la expresión: $\checkmark$

$$\left(-\frac{h-3}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^h + 1 + \frac{1}{9} \left[(h+1) \left(\frac{2}{3}\right)^h \right] = \left(\frac{2}{3}\right)^h \left[\frac{-h-3}{3} + \frac{h+1}{9} \right] + 1 \checkmark$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^h \left[\frac{-2h-8}{9} \right] + 1 \right] \checkmark$$

Quiero ver si esto es igual a $*$:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^h \left[\frac{-2h-8}{9} \right] + 1 = \left[\frac{-h-4}{3} \right] \left(\frac{2}{3}\right)^{h+1} + 1 \checkmark$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^h \neq 0 \Rightarrow \frac{-2h-8}{9} = \frac{-h-4}{3} \left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{-2h-8}{9} = \frac{-2h-8}{9}} \checkmark$$

es exactamente lo mismo!

$\therefore$ puedo asegurar que $p(h) \text{ v } \forall h \in \mathbb{N}.$

3) PRIMERO MOTO QUE LAS CORDILLERAS DE SALIDA Y LLEGADA TIENEN EL MISMO CARDOINAL, LUEGO ME VAY A FIJAR PRIMERO EN LA SEGUNDA CORDILLERA

• $f(1) + f(2)$ IMPAR: NAY Z ^{CASOS} ~~2~~ QUS $f(n) = 2k + 1$ YALREVER

$f(1) \in \mathbb{R}$ ~~no~~ ^{a algum} conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$

$$f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}K$$

$f(z)$ PUEDE IR ^{ALGUNOS DEL} ~~EL~~ CONJUNTO $\{2, 4, 6, 8\}$

QNTAU CRB $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 2$ $\uparrow$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(1) & f(2) \end{array}$$

EL "ALREYES DE LASUMA"

Ahora me pido la segunda condición:

- $f(3) \leq f(4) \leq f(5)$ IMAGINO QUE ES COMO EN ANAGRAMA QUITANDO EL CASO DONDE SON LAS 3 IGUAL O LAS 3 IGUALES, EN UN 3 LUGARES DONDE $f(3) < f(4) < f(5)$ Y QUEDEN FIJOS:

CL OASO DONDE SON LAS 3 IGUAL O
MAS IGUALES, ENLO 3 VIGAROS
DONDE $f(3) < f(4) < f(5)$
Y QUEDEN FIDIOS:

$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{CONJUNTO VERDADEIRO} \\ \text{LOG PIES} \end{matrix}$

$$y = f(x, z)$$

2 op
LUEGO TENGO EL CASO DONDE $f(3) = f(4) = f(5) \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}_S$

Y EL caso donde $f(3) = f(4) < f(5) \uparrow 8$

↳ we have $f(3) < f(4) = f(5)$ $\binom{8}{2}$

LOGARIFMO DE

$$f(3) = f(4) < f(5)$$

LUEGO TENGO $f(6)$, $f(7)$ Y $f(8)$ QUE NO TIENEN NINGUNA CONDICION MAS QUE SER UNA FUNCION SOBRE POSITIVA, POR LO QUE TENDRAN QUE CUBRIR ~~12~~ LAS BLANCITAS QUE QUEDARON DESPUES DE LAS RESTRICCIONES YA QUE PARA SER SOBRE SE NECESITA QUE EXISTA UN A PARA CADA B OBLA FUNCION (CON A CUANTO SALIDA, B CUANTO USADA)

PERO COMO SON FUNCIONES $f(6)$, $f(7)$ Y $f(8)$ SÓLO PUEDEN IR A UNA SOLA COSA DEL CONJUNTO DE NEGATIVOS TENIENDO EN CUENTA LAS RESTRICCIONES SI, $f(3)$ Y $f(4)$ A $f(5)$ NO TOMAN VALORES DISTINTOS ME VAN A QUEDAR CINCUENTA DE B SIN CUBRIR (CON LA SEGUNDA

RESTRICION NO PASA MADA PORQUE VAN A GUSTOS DISJUNTOS Y POR LO TANTO

$f(1)$ a $f(2)$ NUNCA SERIAN IGUALES, ENTONCES DESCARTO LAS POSIBILIDADES DE IGUALDAD EN LA PRIMERA RESTRICCIÓN Y QUEDA:

$$\underbrace{\binom{4}{1} \binom{4}{1}}_{\text{PRIMERA RESTRICCIÓN}} - \underbrace{2 \cdot \binom{8-2}{3}}_{\text{2DA RESTRICCIÓN}}$$

PRIMERA RESTRICCIÓN - 2 ELEMENTOS
ELEGIDOS EN
PRIMERA
RESTRICCIÓN

$$- \underbrace{\binom{8-5}{3}}_{f(6), f(7) \text{ y } f(8)}$$

Te falta 3!, porque
pueden tomar cualquier
orden $f(6), f(7)$ y $f(8)$
 $f(6), f(7) \text{ y } f(8)$

MENOS LOS ELEMENTOS
PUEGIDOS DE LAS RESTRICCIONES
PARA "CORRER" LO QUE FALTABA
3

ESTO ES IGUAL A LAS POSIBLES FUNCIONES SOBRE Y RELATIVAS QUE
CUMPLEN LAS RESTRICCIONES

4-

$$\begin{aligned} \textcircled{I} \quad d \mid a^2 + a \\ \textcircled{II} \quad d \mid a^3 + 3a^2 + 2a + 14 \end{aligned} \xrightarrow{-aI + II} d \mid 2a^2 + 2a + 14 \xrightarrow{III - 2I} \boxed{d \mid 14} \checkmark$$

$\hookrightarrow d \in \{1, 2, 7, 14\} \checkmark$

→ pruebo que para con los valores hallados.

CASO 2

- $a^2 + a \equiv 0(2)$
- $a^3 + 3a^2 + 2a + 14 \equiv 0(2) \Leftrightarrow a^3 + a^2 \equiv 0(2)$

Γ_2

a	0	1
$a^2 + a$	0	0
$a^3 + a^2$	0	0

$\checkmark$

2 divide para todo a. $\checkmark$

CASO 7

- $a^2 + a \equiv 0(7)$
- $a^3 + 3a^2 + 2a + 14 \equiv 0(7) \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 + 2a \equiv 0(7)$

a	0	1	2	3	4	5	6
$a^2 + a$	0	2	6	5	6	2	0
$a^3 + 3a^2 + 2a$	0	6	3	4	1	0	0

deduzco que 7 divide
 $\Leftrightarrow a \equiv 0(7) \text{ ó } a \equiv 6(7) \checkmark$

para los casos donde $a \equiv 0(7) \wedge a \equiv 6(7)$, como tanto 2 como 7 dividen, puedo afirmar que 14 también lo hace, ya que $14 = 7 \cdot 2$ y $7 \nmid 2$

$\therefore \begin{cases} d = 2 \quad \forall a \text{ (o si } a \not\equiv 0(7) \text{ y } a \not\equiv 6(7)) \\ d = 14 \quad \Leftrightarrow a \equiv 0(7) \text{ ó } a \equiv 6(7) \end{cases} \checkmark$