

Tema 1

1	2	3	4
β	β	β'	β

CALIFICACIÓN

10

ley

1er Recuperatorio Álgebra I - viernes 12 de Marzo de 2026

APELLIDO:

NOMBRE:

CARRERA:

LIBRETA:

Computación

Ejercicio 1. Sea

$$X = \{f : \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}\},$$

es decir, X es el conjunto de todas las funciones del conjunto $\{1, \dots, 10\}$ en el conjunto $\{1, \dots, 100\}$. Se define en X la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$f \mathcal{R} g \iff f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2)$$

- a) Decidir si la relación es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.
 b) Sea $g \in X$, definida por

$$g(n) = n, \quad \forall n \in \{1, \dots, 10\}$$

¿Cuántas funciones $f \in X$ **inyectivas** cumplen que $f \mathcal{R} g$?

Ejercicio 2. Sea $(a_n)_{n \geq 2}$ la sucesión definida recursivamente por:

$$a_2 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = (n+1)(1 + a_n), \quad \forall n \geq 2$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se verifica que

$$a_n = n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

Ejercicio 3. Determinar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división por 50 de

$$3(-49)^n + 151^{3n+1} + \sum_{k=0}^n 2^k (2k)!$$

Ejercicio 4. Sea $n \in \mathbb{N}$ impar. Hallar los posibles valores de

$$(3n + 2^{n+1} : 2n - 2^n)$$

y dar un ejemplo en cada caso.

Justifique todas sus respuestas

$$1) \quad X = \left\{ f: \{m \in \mathbb{N} : m \leq 10\} \rightarrow \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\} \right\}$$

$$fRg \Leftrightarrow f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2)$$

Solución:

2) Veo cómo es la relación:

* REFLEXIVIDAD: $\forall f \in X, fRf$

$$fRf \Leftrightarrow f(1) = f(1) \wedge f(2) \leq f(2)$$

Como $f(1) = f(1) \checkmark \wedge f(2) = f(2) \checkmark$

• SE CUMPLE LA REFLEXIVIDAD $\checkmark$

* SIMETRÍA: $f, g \in X, \text{ si } fRg \Rightarrow gRf$

Assumiendo $fRg \Leftrightarrow f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2)$

Quiero ver si $gRf \Leftrightarrow g(1) = f(1) \wedge g(2) \leq f(2)$

• DEFINO f y g PARA UN CONTRA EJEMPLO

$$f(m) = m$$

$$m \in \mathbb{N} \leq 10 \checkmark$$

$$g(1) = 1$$

$$g(m) = m+1, m \in \mathbb{N} \leq 10$$

~~$f(1) = 1$~~

Error (e):

$$fRg \Leftrightarrow f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2)$$

~~$f(1) = 1$~~

$$f(1) = 1$$

$$g(1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \checkmark \wedge 2 \leq 3 \checkmark$$

• SE CUMPLE $\checkmark$

$$f(2) = 2$$

$$g(2) = 3$$

Ahora veo si ocurre gRf

~~$f(2) = 2$~~

~~$g(2) = 3$~~

$$gRf \Leftrightarrow g(1) = f(1) \wedge g(2) \leq f(2)$$

$$1 = 1 \quad \checkmark \quad 3 \leq 2 \quad \times \quad \text{ABS!} \quad \checkmark$$

Como en este caso fRg y gRf , NO se cumple la simetría. $\checkmark$

* Antisimetría: $f, g \in X$, $f \neq g$, si $fRg \Rightarrow gRf$

Vuelvo a definir f y g para ser contraejemplos

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 2$$

$$f(m) = m + 2$$

$$m \in \mathbb{N}, 3 \leq m \leq 10$$

$$g(1) = 1$$

$$g(2) = 2$$

$$g(m) = m + 6, m \in \mathbb{N}$$

$$3 \leq m \leq 10$$

* f y g son
funciones
diferentes.

~~errores~~ errores: $fRg \Leftrightarrow f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2)$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \wedge 2 \leq 2 \quad \checkmark \quad \checkmark$$

Se cumple que fRg ,
Así que ahora veo que
ocurre con gRf

$$gRf \Leftrightarrow g(1) = f(1) \wedge g(2) \leq f(2)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 \wedge 2 \leq 2 \quad \checkmark \quad \checkmark$$

También se cumple gRf ,

Y como sabemos que $f \neq g$, errores NO se cumple la antisimetría. $\checkmark$

* Transitividad: $f, g, h \in X$, si $fRg \wedge gRh \Rightarrow fRh$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Así que } fRg \Leftrightarrow f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2) \\ \text{y que } gRh \Leftrightarrow g(1) = h(1) \wedge g(2) \leq h(2) \end{array} \right\} \text{Hipótesis}$$

errores gRg $fRh \Leftrightarrow f(1) = h(1) \wedge f(2) \leq h(2) \quad \checkmark$

$$f(1) = g(1) \wedge g(1) = h(1)$$

$$\Leftrightarrow f(1) = g(1) = h(1)$$

$$\text{por ERDE } f(1) = h(1) \checkmark$$

• Se cumple la primera parte de la relación $\checkmark$

$$f(2) \leq g(2) \wedge g(2) \leq h(2)$$

$$\Leftrightarrow f(2) \leq g(2) \leq h(2) \checkmark$$

$$\text{por ERDE } f(2) \leq h(2) \checkmark$$

• Se cumple la segunda parte de la relación. $\checkmark$

• Entonces, se cumple la transitividad. $\checkmark$

Conclusión: La relación planteada es reflexiva y transitiva. $\checkmark$

$$b) g \in X, g(n) = n, \forall n \in \{1, \dots, 10\}$$

¿Cuántas funciones (inyectivas) cumplen con fRg ?

• Que f sea inyectiva implica que cada $f(n)$ tendrá un valor del codominio diferente al resto de $f(m)$

solo 2 valores

1 2

$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad f(4) \quad f(5) \quad f(6) \quad f(7) \quad f(8) \quad f(9) \quad f(10)$

$$\text{• Para que } fRg, f(1) = g(1) \wedge f(2) \leq g(2) \checkmark$$

• Como mis únicas condiciones están en $f(1)$ y $f(2)$, me concentro primero en cumplirlos

$$[f(1)]: f(1) = g(1)$$

$$g(1) = 1, \text{ por ERDE } f(1) \text{ solo puede ser } 1 \checkmark$$

$$[f(2)]: f(2) \leq g(2)$$

$$g(2) = 2, \text{ ~~pero como } f(1) \text{ ya es igual a 1 y estamos en una inyectividad, } f(2) \text{ solo puede tomar el valor de 2 para ser menor o igual a } g(2)~~$$

PERO como $f(1)$ YA ES IGUAL A 1 Y ESTAMOS EN UNA INYECTIVIDAD, $f(2)$ SOLO PUEDE TOMAR EL VALOR DE 2 PARA SER MENOR O IGUAL A $g(2)$ $\checkmark$

Es imposible que valores tomar el resto de F , siempre y cuando
mantener la inyectividad ✓

<u>98</u> posib.	<u>97</u> p.	<u>96</u> p.	<u>95</u> p.	<u>94</u> p.	<u>93</u> p.	<u>92</u> p.	<u>91</u> p.
$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$

Como el codominio es $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$, si cortamos los números de $f(1)$ y $f(2)$,
habrá 98 posibilidades, y cada f siguiente tendrá una posibilidad menos para mantener
la inyectividad. ✓

Conclusión: Las funciones f ~~funciones~~ inyectivas se cumplen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

son:

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{98!}{90!} = 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91 = \binom{98}{8} \cdot 8! \quad \checkmark$$

2) $(a_n)_{n \geq 2}$ $a_2 = 2$ $a_{n+1} = (n+1)(1+a_n), \forall n \geq 2$

Probar $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ que

$$a_n = n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

Solución: Prueba por inducción:

Caso Base: $[n=2]$

$$a_2 = 2$$

$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$a_2 = 2! \sum_{k=1}^{2-1} \frac{1}{k!} = 2 \cdot \frac{1}{1!}$$

$$[2=2] \checkmark \checkmark$$

Paso Inductivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

HIPÓTESIS INDUCTIVA

Assumo que se cumple

$$a_n = n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \checkmark$$

P / algún $n \geq 2$

~~$\forall n \geq 2$~~

$n \in \mathbb{N}$

Quiero ver que

$$a_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \checkmark$$

Reemplazo a_{n+1} por como está definida en la sucesión:
quiere ver

$$(n+1)(1+a_n) \stackrel{?}{=} (n+1)! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$\frac{(n+1)}{(n+1)} \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(n+1)}(1+a_n) = \cancel{(n+1)} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \checkmark$$

~~demuestro~~

$$\Leftrightarrow 1 + a_n = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \checkmark$$

~~por H.I~~

$$\boxed{\text{POR H.I}} \Leftrightarrow 1 + n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n!} + \frac{n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m!} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \quad \checkmark$$

~~al~~ ~~...~~

• Ver la forma de ambas sumatorias

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{(m-1)!} + \frac{1}{m!}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{(m-2)!} + \frac{1}{(m-1)!}$$

Comentario: notar que $\frac{1}{m!}$ es igual a $\frac{1}{k!}$ tomando $k=m$

(*) Ambas son iguales

$$\frac{1}{m!} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}$$

($\frac{1}{m!}$ es el último término de $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}$)

La igualdad se cumple! $\checkmark$

Conclusión: Por definición de la sumatoria, queda probado el paso inductivo.

- Como se cumple el caso base y el paso inductivo, queda probada la igualdad $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\checkmark$

3) DETERMINAR PARA CADA $n \in \mathbb{N}$, EL RESTO DE LA DIVISIÓN POR 50 DE

$$3(-49)^n + 151^{3n+1} + \sum_{k=0}^n 2^k (2k)!$$

Solución:

$$\underbrace{3(-49)^n}_{C.A.1} + \underbrace{151^{3n+1}}_{C.A.2} + \sum_{k=0}^n 2^k (2k)! \equiv r(50)$$

C.A.1: $(-49)^n \equiv 1^n \equiv \boxed{1} \checkmark$
 (50) (50)

C.A.2: $151^{3n+1} \equiv 1^{3n+1} \equiv \boxed{1} \checkmark$
 (50) (50)

$$\Rightarrow 3 \cdot 1 + 1 + \sum_{k=0}^n 2^k (2k)! \equiv r(50) \checkmark$$

ANÁLISIS PARA CON LA SUMATORIA, ~~ANÁLISIS~~

2º. 0! ~~0!~~

$$\sum_{k=0}^n 2^k (2k)! = 2^0 (0!) + 2^1 (2!) + 2^2 (4!) + 2^3 (6!) + 2^4 (8!) + 2^5 (10!) + \dots + 2^n (2n)!$$

2º. 0! = 1 · 1 = 1 = 2 · 2! + 4 · 4! + 8 · 6! + 16 · 8! + 32 · 10! + ... + 2^n (2n)!

• NOTAR QUE EN $k=5$, APARECE UN 10!, EL CUAL CORTIEMBRE A UN (10.5) MULTIPLICÁNDOSE JUNTO CON OTROS FACTORES, SEA CUAL SEA EL NÚMERO, SE LE JERÁ CORRIENTE A CERCA MÓDULO 50, YA QUE EL $(50, k)$, $k \geq 5$ ✓

• ENTORCES, DESDE $k=5$ HASTA $k=n$, TODOS LOS TÉRMINOS SERÁN CERO, $k \geq 5$ ✓

• VUELVA A LA ECUACIÓN DE CONVERGENCIA

(CASO $n \geq 5$)

$$\Rightarrow 3 + 1 + 2 \cdot 2! + 4 \cdot 4! + 8 \cdot 6! + 16 \cdot 8! + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv r(50)$$

* SE ME CANCELARON TODOS LOS TÉRMINOS DE LA SUMATORIA MENOS LOS PRIMEROS 4.

$$\Rightarrow 3 + 1 + \overbrace{4 + 46 + 10 + 20}^{\equiv 0(50)} \equiv r(50)$$

$$\Rightarrow \frac{34}{35} \equiv r(50)$$

Entonces, $\forall m \in \mathbb{N} / m \geq 5$, el resto sólo se JENA 35

* Ahora, analizo aparte a $m \in \{1, 2, 3, 4\}$

(CASO $m=1$)

$$3(-49)^1 + 151^4 + 2 \cdot 2! \equiv 3 + 1 + 4 \pmod{50}$$

$$\Leftrightarrow 8 \equiv r(50)$$

En $m=1$, el resto es 8

(CASO $m=2$)

$$3(-49)^2 + 151^7 + 2 \cdot 2! + 4 \cdot 4! \equiv 3 + 1 + 4 + 96 \pmod{50} \equiv 0 \pmod{50}$$

En $m=2$, $r=4$

$$\Leftrightarrow 4 \equiv r(50)$$

(CASO $m=3$)

$$3(-49)^3 + 151^{10} + 2 \cdot 2! + 4 \cdot 4! + 8 \cdot 6! \equiv 3 + 1 + 4 + 96 + 160 \pmod{50} \equiv 0 \pmod{50}$$

En $m=3$, $r=14$

$$\Leftrightarrow 14 \equiv r(50)$$

(CASO $m=4$)

$$3(-49)^4 + 151^{13} + 2 \cdot 2! + 4 \cdot 4! + 8 \cdot 6! + 16 \cdot 8! \equiv 3 + 1 + 4 + 96 + 160 + 320 \pmod{50} \equiv 0 \pmod{50}$$

$$\Leftrightarrow 35 \equiv r(50)$$

* ES LO MISMO QUE EL RESTO DE m MAYOR A 4.

CONCLUSIÓN: Los posibles restos para cada $m \in \mathbb{N}$ son:

¿Por qué estos son los restos?

$$\begin{cases} 8 & \text{si } m=1 \\ 4 & \text{si } m=2 \\ 14 & \text{si } m=3 \\ 35 & \text{si } m \geq 4 \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}$$

4) $m \in \mathbb{N} / m \text{ impar}$

$$d = (3m + 2^{m+1} : 2m - 2^m)$$

Solución:

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 3m + 2^{m+1} \\ d \mid 2m - 2^m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 3(2m - 2^m) - 2(3m + 2^{m+1}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow d \mid 6m - 3 \cdot 2^m - 6m - 4 \cdot 2^m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d \mid 7 \cdot 2^m} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 3m + 2^{m+1} + 2(2m - 2^m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow d \mid 3m + 2^m \cdot 2 + 4m - 2^m \cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{d \mid 7m} \quad \checkmark$$

• Si $d \mid 7 \cdot 2^m$ y $d \mid 7m$, por propiedades del MCD:

$$d \mid (7 \cdot 2^m : 7m) \Leftrightarrow d \mid 7 (2^m : m)$$

¿quiero de
cuánto g'm
no tiene

2. Como uno
de sus divisores?

* Por el Teorema Fundamental de la Aritmética:

- Debido a que 2^m solo se puede escribir como producto de m veces 2, y m al ser impar no tiene a 2 (como producto de su divisor), el MCD $(2^m : m)$ siempre será 1 ya que no comparten divisores primos. $\checkmark$

$$\Rightarrow d \mid 7 \cdot 1 \Leftrightarrow \boxed{d \mid 7} \quad \checkmark$$

$$\text{Div}_+(7) = \{1, 7\} \rightarrow \text{El MCD siempre es positivo} \quad \checkmark$$

Conclusión:

* Los posibles valores que puede tomar d son 1 y 7 $\checkmark$

• Busco a ojo m que cumpla con cada caso.

Caso 1: $m=1$

$$(3 \cdot 1 + 2^2 : 2 \cdot 1 - 2^1) = (7 : 0) = \boxed{7} \quad \checkmark$$

Caso 2: $m=3$

$$(3 \cdot 3 + 2^1 : 2 \cdot 3 - 2^3) = (25 : -2) = \boxed{1} \quad \checkmark$$

Conclusión: Los posibles MCD son $d=1$ y $d=7$ $\checkmark$

EJ $d=1$ con $m=3$

EJ $d=7$ con $m=1$ $\checkmark$