

Tema A

1	2	3	4
B	B	B	B

NOTA
10

Primer Parcial Álgebra I - viernes 16 de mayo (TURNOS TARDE/NOCHE)

APELLIDO: Garoglio

TURNOS PRÁCTICO: 5

NOMBRE: Tomás Gabriel

1. Sea $A = \{f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\} : f \text{ inyectiva}\}$. Se define en A la siguiente relación $\mathcal{R}$:

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow f(3) - g(3) = f(4) - g(4) \text{ y } f(5) - g(5) \text{ es par.}$$

- (a) Calcular el cardinal de A .
- (b) Decidir si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- (c) Si $f : \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$ es una función en A tal que $f(n) = r_9(n) + 1$, calcular la cantidad de funciones en A que se relacionan con f .

2. Probar que $\sum_{i=1}^n \frac{2}{n+i} \geq \frac{7}{6}$ para todo $n \geq 2$.

3. Hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $(5n^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) = 45$ y que tenga exactamente 12 divisores positivos.

4. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $(7 \cdot 3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n)$ toma únicamente dos valores. Hallar dichos valores y exhibir un ejemplo en cada caso.

Justifique todas sus respuestas.

1) Sea $A = \{f: \underbrace{\{1, \dots, 9\}}_X \rightarrow \underbrace{\{1, \dots, 11\}}_Y : f \text{ inyectiva}\}$.

$R \text{ en } A / f R g \Leftrightarrow f(3) - g(3) = f(4) - g(4) \text{ y } f(5) - g(5) \text{ es par.}$

a) Calcular $\#A$.

$\#A$ va a ser la cantidad posible de distintos funciones inyectivas de Dominio $X = \{1, \dots, 9\}$ y Codominio $Y = \{1, \dots, 11\}$.

En estos casos podemos calcular $\#A$ con la fórmula $\frac{(\#Y)!}{(\#Y - \#X)!}$ dado que:

$f(x)$ tiene $\#Y$ posibles $y \in Y$ como imagen.

Como f es inyectiva, no existen dos $x \in X$ distintos entre sí para los cuales $f(x)$ tiene asignado el mismo y .

Por esto, $f(x)$ tiene $\#Y - 1$ posibles imágenes, dado que ya un $y \in Y$ se le fue asignado a $f(x)$.

Este razonamiento es aplicable a los sucesivos $x \in X$, terminando en que $f(x)$ tiene $\#Y - 8$ posibles imágenes.

Multiplicando todas las posibilidades, tenemos $\prod_{i=\#Y-8}^{\#Y} i$. Esto es lo mismo que decir

$$\frac{\prod_{i=1}^{\#Y} i}{\prod_{i=1}^{\#Y-9} i} \text{ que es igual a } \frac{(\#Y)!}{(\#Y-9)!}$$

Reemplazando $\#Y$, tengo $\frac{11!}{(11-9)!} = \frac{11!}{2}$ posibles $f \in A$.

Es decir, $\boxed{\#A = \frac{11!}{2}}$

b) Decidir si R es una relación de equivalencia.

$$fRg \Leftrightarrow f(3) - g(3) = f(4) - g(4) \text{ y } f(5) - g(5) \text{ es par}$$

Para que una relación R sea de equivalencia, debe ser (R) Reflexiva, (S) Simétrica y (T) transitiva.

¿ R es (S) ? Trabaja separadamente con ambos requisitos.

~~Dado~~ ^{Dado} $f(3) - g(3) = f(4) - g(4)$. quiero saber si $g(3) - f(3) = g(4) - f(4)$.

$$g(3) - f(3) = g(4) - f(4) \Leftrightarrow (-1)(f(3) - g(3)) = (-1)(f(4) - g(4))$$

Ya demas esta última proposición por cierto porque es nuestra hipótesis.

Este primer requisito es (T) transitiva.

Dado $f(5) - g(5)$ par, ¿ $g(5) - f(5)$ es par?

$g(5) - f(5) = (-1)(f(5) - g(5))$. Multiplicar un número por (-1) ^{no afecta} su Paridad.

Ambos requisitos son Reflexivos. R es (S) .

¿ R es Reflexiva? ~~fRf~~ $fRf \Leftrightarrow f(3) - f(3) = f(4) - f(4)$ y $f(5) - f(5)$ es par.

$$f(3) - f(3) = 0 = f(4) - f(4) \rightarrow 1^\circ \text{ Condición se cumple}$$

$$f(5) - f(5) = 0, 0 = 0 \cdot 2 \rightarrow 0 \text{ es par} \rightarrow 2^\circ \text{ Condición se cumple}$$

R es (R)

¿ R es (T) ? quiero probar que $fRg \wedge gRh \Rightarrow fRh$.

$$\text{Si } fRg \Rightarrow f(3) - g(3) = f(4) - g(4) \Leftrightarrow g(3) - g(4) = f(3) - f(4).$$

$$f(5) - g(5) \text{ par} \Leftrightarrow f(5) \text{ y } g(5) \text{ comparten paridad.}$$

$$\text{Si } gRh \Rightarrow h(3) - g(3) = h(4) - g(4) \Leftrightarrow g(3) - g(4) = h(3) - h(4).$$

$$g(5) - h(5) \text{ par} \Leftrightarrow h(5) \text{ y } g(5) \text{ comparten paridad.}$$

Si $(f(5) - g(5))$ y $(h(5) - g(5))$ comparten paridad, $f(5)$ y $h(5)$ comparten paridad $\Leftrightarrow f(5) - h(5)$ par.

Como ~~ambos~~ $h(4) - h(3)$ y $f(4) - f(3)$ son iguales a $g(4) - g(3)$, $h(4) - h(3) = f(4) - f(3)$

$$\Leftrightarrow h(4) - f(4) = h(3) - f(3).$$

$\therefore \mathbb{R}$ es $\mathbb{S}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T} \Rightarrow \mathbb{R}$ es de equivalencia

c) Si: $f: \{1, \dots, 9\} \rightarrow \{1, \dots, 11\}$ es una función en A tal que $f(n) = v_g(n) + 1$, calcular la cantidad de funciones en A que se relacionan con f .

Voy a calcular los elementos relevantes de f :

$$\bullet f(3) = v_g(3) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\bullet f(4) = v_g(4) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\bullet f(5) = v_g(5) + 1 = 5 + 1 = 6$$

Entonces, los $g \in A / g \in B_g$ tienen que cumplir:

$$\bullet 4 = g(3) = 5 - g(4) \Leftrightarrow g(4) - g(3) = 1$$

$$\bullet 6 - g(5) \text{ es par} \Leftrightarrow g(5) \text{ es par}$$

Entonces, quiero conocer todas las posibilidades de que $g(4) = g(3) + 1$ y $g(5)$ sea par.

Observo a simple vista que hay 10 posibles pares de valores $\in \{1, \dots, 11\}$ que cumplen

para $g(3)$ y $g(4)$ tal que $g(4) = g(3) + 1$. Estos son:

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (9, 10), (10, 11)\}$$

Asigne el que se asigne a $g(3)$ y $g(4)$, van a quedar sin asignar 4 números impares $\in \{1, \dots, 11\}$, dado que todos los pares asignan exactamente 1 par del Codominio.

Hoy entonces 4 posibles imágenes para $g(5)$.

Quedan por asignar entonces 8 elementos del codominio a 6 elementos del Dominio $(\{1, \dots, 9\} - \{3, 4, 5\})$.

Uso entonces la fórmula $\frac{(\#Y)!}{(\#Y - \#X)!}$ que explique en el ítem 2). Pasa reemplazando $\#Y$ por los 8 elementos del codominio y $\#X$ por los 6 restantes del dom.

~~Por lo tanto, la cantidad de funciones es:~~

En conclusión, hay $10 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{(8-6)!}$ posibles $g \in B_g \wedge g \in A$. 10 posibles pares $g(3), g(4)$, 4 posibles pares para $g(5)$ y las posibles permutaciones para el resto de elementos.

$$10 \cdot 4 \cdot \frac{8!}{2} = 20 \cdot 8! = 806400 \text{ posibles } g.$$

2. Probar que $\sum_{i=1}^n \frac{2}{n+i} \geq \frac{7}{6} \quad \forall n \geq 2$

Voy a probarlo por inducción:

• Caso Base $P(2)$: $\sum_{i=1}^2 \frac{2}{2+i} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6} \geq \frac{7}{6}$ ✓

• Paso Inductiva: asumo $P(k)$: $\sum_{i=1}^k \frac{2}{k+i} \geq \frac{7}{6}$. Quiero Probar $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2}{k+1+i} \geq \frac{7}{6}$

Quiero expresar $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2}{k+1+i}$ de forma tal que uno de sus términos sea $\sum_{i=1}^k \frac{2}{k+i}$ para poder aplicar mi hipótesis inductiva. Por ello voy a escribir ambas por extensión.

$$\sum_{i=1}^k \frac{2}{k+i} = \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+2} + \frac{2}{k+3} + \dots + \frac{2}{k+(k-1)} + \frac{2}{k+k}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2}{k+1+i} = \underbrace{\frac{2}{k+2} + \frac{2}{k+3} + \dots + \frac{2}{k+(k-1)} + \frac{2}{k+k}}_{\text{Términos de } \sum_{i=1}^k \frac{2}{k+i} \text{ exceptuando } \left(\frac{2}{k+1}\right)} + \underbrace{\frac{2}{k+k+1} + \frac{2}{k+k+1+1}}_{\text{Términos Adicionales}}$$

Por eso podemos escribir $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{2}{k+1+i}$ como $\sum_{i=1}^k \frac{2}{k+i}$, restando los términos faltantes y sumando los adicionales.

Entonces, lo que quiero ver es $\left(\sum_{i=1}^k \frac{2}{k+i}\right) - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+k+1} + \frac{2}{k+k+1+1} \geq \frac{7}{6}$

Por hipótesis inductiva si $\frac{7}{6} - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+2} \geq \frac{7}{6}$, habré probado $P(k+1)$

$$\frac{7}{6} - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+2} \geq \frac{7}{6} \iff \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+2} - \frac{2}{k+1} \geq 0 \iff \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+2} \geq \frac{2}{k+1}$$

$$\iff \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \frac{2k+1+2k+2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{4k+3}{4k^2+3k+2} \geq \frac{1}{k+1} \iff \frac{(4k+3)(k+1)}{4k^2+3k+2} \geq 1$$

Denominador $\neq 0$

$$\iff (4k+3)(k+1) = 4k^2+7k+3 \geq 4k^2+3k+2$$

$$\iff 4k \geq -1$$

Siempre se cumple $4k \geq -1$ porque $k \geq 2$.

Probado $P(k+1)$, se probó la premisa por inducción.

3) Hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $(5n^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) = 45$ y que tenga exactamente 12 divisores positivos.

A través de $(5n^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) = 45$ podemos saber varios cosas de n :

- Primero apliquemos $(a : b) = a(b : b)$

$$(5n^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) : 5(n^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7) = 5 \cdot 3^2$$

- A partir de $(n^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7) = 3^2$ podemos deducir que:

- 2 y 7 no son factores de n^2 y por tanto de n . De otro modo serían factores del mcd.

- n^2 tiene 3^2 como factor y no posee ninguna otra potencia de 3.

- De lo contrario estarían presentes en el mcd, pues el segundo miembro tiene 3^4 como factor

- Si n^2 tiene 3^2 como factor, n tiene 3^1 como factor.

⇒ Para que un número tenga m divisores positivos, tiene que cumplir

$$m = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1)(\alpha_7 + 1) \dots$$

donde α_p es la potencia en la que el primo p divide al número.

Nuestro razonamiento anterior concluye: $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_7 = 0$

Como queremos que n tenga doce divisores positivos, vamos a buscar el mínimo de:

$$12 = (0+1)(1+1)(\alpha_5+1)(0+1)(\alpha_{11}+1)(\alpha_{13}+1) \dots$$

$$12 = 2(\alpha_5+1)(\alpha_{11}+1)(\alpha_{13}+1) \dots$$

$$2 \cdot 3 = 6 = (\alpha_5+1)(\alpha_{11}+1)(\alpha_{13}+1) \dots$$

Como todos los factores de la ecuación son enteros positivos, vamos a necesitar

que los dos factores cuyo α_p correspondo al α disponible más pequeño sean 3 y 2.

$$\Rightarrow 2 \cdot 3 = \frac{(\alpha_5+1)}{3} \cdot \frac{(\alpha_{11}+1)}{2} \Rightarrow \alpha_5 = 2, \alpha_{11} = 1$$

Elegí los factores en ese orden, porque asignar las mayores potencias a las primas más pequeñas siempre resulta en un producto más pequeño.

$$\text{Específicamente, } 5^2 \cdot 11 = 275 < 605 = 5 \cdot 11^2$$

$$\therefore n = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot 7^{\alpha_7} \cdot 11^{\alpha_{11}} = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = \boxed{825 = n}$$

$$\text{Para verificar } n=825 \quad (5 \cdot 825^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7) = (5 \cdot (3 \cdot 5^2 \cdot 11)^2 : 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7)$$

$$= 5(3^2 \cdot 5^4 \cdot 11^2 : 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 7) = 5 \cdot 3^2 \cdot (5^4 \cdot 11^2 : 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7) = 45 \cdot 1 = 45 \checkmark$$

4) Probar que se verifica que $(7 \cdot 3^n - 5^{n+1} : 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n)$ como únicamente dos valores.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot 3^0 - 5^{0+1} = 2 \\ 3^{0+1} + 7 \cdot 5^0 = 10 \end{array} \right\} \text{med} = 2 \quad \left. \begin{array}{l} 7 \cdot 3 - 5 = -4 \\ 9 + 7 \cdot 5 = 44 \end{array} \right\} \text{med} = 4 \quad \Bigg| \text{Borrador.}$$

$$d = (7 \cdot 3^n - 5^{n+1}, 3^{n+1} + 7 \cdot 5^n)$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 7 \cdot 3^n - 5 \cdot 6^n \text{ "Eq1"} \\ d \mid 3 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n \text{ "Eq2"} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \text{Eq1} - 7 \text{Eq2} \\ d \mid 7 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot 5^{n+1} - 7 \cdot 3^{n+1} + 7 \cdot 7 \cdot 5^n = 64 \cdot 5^n \\ d \mid 3 \cdot 3^n + 7 \cdot 5^n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 64 \cdot \text{Eq2} - 7 \cdot \text{Eq1} \\ d \mid 64 \cdot 5^n \\ d \mid 64 \cdot 3^{n+1} \end{array} \Rightarrow \text{Comparten solo los divisores de 64}$$

$$\cancel{d \mid 64 \cdot 3^{n+1}}$$

$$d \in \text{Div.}(64) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

Deducir que $d \geq 2$ a partir de que ambos miembros del med son pares.

Esto lo sé porque $7 \cdot 3^n - 5^{n+1}$ es una resta entre impares $\Rightarrow$ es par

y porque $3^{n+1} + 7 \cdot 5^n$ es una suma de impares $\Rightarrow$ Siempre da par

Entonces, $d \in \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

Manualmente verifico para $n=0 \Rightarrow d = (2 : 10) = 2$

La misma para $n=1 \Rightarrow d = (-4, 44) = 4$.

Tengo que encontrar como descartar $\{8, 16, 32, 64\}$

~~Prueba por inducción reversa~~

$$\cancel{(7 \cdot 3^{n+1} - 5^{n+2} : 3^{n+2} + 7 \cdot 5^{n+1}) \text{ n=0}}$$

$$\cancel{7 \cdot 3^{n+1} - 5^{n+2} : 3^{n+2} + 7 \cdot 5^{n+1}}$$

$$\cancel{7 \cdot 3^{n+1} - 5^{n+2} : 3^{n+2} + 7 \cdot 5^{n+1}}$$

$$\cancel{7 \cdot 3^{n+1} - 5^{n+2} : 3^{n+2} + 7 \cdot 5^{n+1}}$$

Intenta Probar por absurdo que alguno de los miembros es dividido por 8.

$$7 \cdot 3^n - 5^{n+1} \stackrel{(8)}{\equiv} 7 \cdot 3^n - (-3)^{n+1} \rightarrow \begin{array}{l} n+1 \text{ impar: } 7 \cdot 3^n + 3^{n+1} = 10 \cdot 3^n = 2 \cdot 5 \cdot 3^n \\ \text{no dividido por } 8 \end{array}$$

$$\rightarrow n+1 \text{ par: } 7 \cdot 3^n - 3^{n+1} = 4 \cdot 3^n = 2^2 \cdot 3^n \\ \text{no divide } 8$$

Si 8 no divide a uno de los miembros del mcd, no divide a d.

~~Por tanto queda descartado como posible d, dado que d | d.~~

~~Si $8 = 2^3$ no divide a d, tampoco lo hacen las sucesivas potencias de dos.~~

~~Por tanto quedan descartados $\{8, 16, 32, 64\}$.~~

Quedan como candidatos $\{2, 4\}$

Estos se encuentran con ~~$n=1 \Rightarrow (-4; 44) = 4 = d$~~
 $n=2 \Rightarrow (-62; 202) = 2 = d$