

¡Excelente!

1	2	3	4	Calificación
B	B	B	B	10 (diez)

APELLIDO Y NOMBRE: Kiszewski Nicolás..... NO. DE LIBRETA:

TURNO: ☐ A-K 11 a 14 hs ☒ L-Z 11 a 14 hs ☐ 16 a 19 hs ☐ 17 a 20 hs

CARRERA: Lic. en Ciencias de Datos (LCO)..... 6 hojas

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer parcial - 21/10/2023

Ejercicio 1. Consideremos el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Sean $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow X / f \text{ es función}\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{F}$ definida por

$$f \mathcal{R} g \iff f(n) \leq g(n), \text{ para todo } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

- a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.
b) Sea $h \in \mathcal{F}$ la función definida como:

$$h(n) = r_3(n), \text{ para todo } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Es decir, h es la función que a cada n le asigna su resto en la división por 3.
Calcular el cardinal del conjunto

$$\{f \in \mathcal{F} / \exists \delta \in \text{Im}(f) \text{ y } f \mathcal{R} h\}.$$

Ejercicio 2. Probar que $\prod_{k=1}^n \frac{10k-5}{2k} > n 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Sea $n \in \mathbb{N}$.

- a) Probar que $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \iff n \equiv 1 \pmod{5}$.
b) Calcular $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Determinar todos los enteros positivos $n \leq 30000$ tales que $(n : 5184) = 1728$ y que tienen exactamente 56 divisores positivos.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas, no omita detalles, y sea claro al escribir.

1) Sean $X = \{0, \dots, 3\}$, $F = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ es función}\}$ y

R la relación en F definida por

$$f R g \Leftrightarrow f(n) \leq g(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$$

a) Determinar si R es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $h \in F$ definida como

$$h(n) = f_3(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$$

Calcular $\# \{f \in F \mid \exists e \in \text{Im}(f) \wedge f R h\}$.

Reflexividad

R es reflexiva si y sólo si para cada $f \in F$ se cumple que $f R f$. Voy a demostrar que se cumple.

A/ Sea $f \in F$. Luego, como $f(n) = f(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$, es trivial demostrar que $f(n) \leq f(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$.

Como $f R f \Leftrightarrow f(n) \leq f(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$, entonces R es una relación reflexiva.

Simetría

R es simétrica si y sólo si para cada $f, g \in F$ tales que $f R g$ se cumple que $g R f$. Demuestro que no se cumple siempre mediante un contraejemplo.

B/ Sea $f \in F$ definida como $f(n) = 1 \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$ y sea $g \in F$ definida como $g(n) = 2 \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$. Luego,

$$\begin{cases} f(n) = 1 & \forall n \in \{0, \dots, s\} \\ g(n) = 2 & \forall n \in \{0, \dots, s\} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(n) & \leq & g(n) \\ 1 & \leq & 2 \end{matrix} \quad \forall n \in \{0, \dots, s\}$$

$\Leftrightarrow f R g$. Sin embargo, $g R f \Leftrightarrow g(n) \leq f(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, s\}$, y sé que esto no es cierto pues $2 \leq 1$ es falso. Entonces, encontraré un ejemplo donde unos $f, g \in F$ cumplan que $f R g$ y que $g R f$. Luego, R no es simétrica. ✓

Antisimetría

R es antisimétrico si y sólo si para cada $f, g \in F$ tales que $f R g$ y $g R f$ entonces $f = g$. Demuestro que no se cumple mediante un contraejemplo.

D/ Sean $f \in F$ definida por $f(n) = 1 \quad \forall n \in \{0, \dots, s\}$ y $g \in F$ definida por

$$g(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \in \{1, \dots, s\} \end{cases} \quad \checkmark$$

Luego, $f(n) = g(n) \quad \forall n \in \{1, \dots, s\}$. ✓ Por lo tanto, se cumple que $f(n) \leq g(n)$ y $g(n) \leq f(n) \quad \forall n \in \{1, \dots, s\}$. ✓
Entonces, $f R g$ y $g R f$. Sin embargo, como $f(0) = 1 \neq 2 = g(0)$, $f \neq g$. Así, encontraré un ejemplo donde unos $f, g \in F$ cumplan que $f R g$ y $g R f$, pero $f \neq g$. Luego, R no es antisimétrica. ✓

Transitividad

R es transitivo si y sólo si para cada $f, g, h \in F$ tales que $f R g$ y $g R h$ se cumple que $f R h$. Demuestro que se cumple.

D) Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$ tales que $f R g$ y $g R h$.
Quiero probar que $f R h$.

$$\rightarrow f R g \Leftrightarrow f(n) \leq g(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, s\}$$

$$\rightarrow g R h \Leftrightarrow g(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, s\}$$

$$\text{Luego, } f(n) \leq g(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, s\}$$

$$\text{Entonces, } f(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, s\} \Leftrightarrow f R h.$$

Así, demostraré que R es transitiva. ✓

(16) Se define $h \in \mathcal{F}$ como $h(n) = r_3(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} h(0) = h(3) = h(6) = 0 \\ h(1) = h(4) = h(7) = 1 \\ h(2) = h(5) = h(8) = 2 \end{cases}$$

Puesto la cantidad de funciones $f \in \mathcal{F}$ cumplen que

$$\begin{aligned} & 3 \in \text{Im}(f) \quad \wedge \quad f R h \\ \Leftrightarrow & 3 \in \text{Im}(f) \quad \wedge \quad f(n) \leq h(n) \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\} \end{aligned}$$

Para $n=0$ y $n=3$ tengo que $h(n)=0$. Entonces, necesito que $f(0) \leq 0$ y $f(3) \leq 0$. Pero como $\min(\text{dom}(f)) = 0$, sé que $f(n) \geq 0 \quad \forall n \in \{0, \dots, 3\}$. Luego,

$$\text{así } f(0) \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq f(3) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) = f(3) = 0. \quad \checkmark$$

Como $f(0)$ y $f(3)$ están unívocamente determinadas, tengo una única variante para $n=0$ y $n=3$. ✓

Para $n=1$ y $n=2$ tengo que $h(n)=1$. Entonces, necesito que

$$0 \leq f(1), f(4) \leq 1 \Leftrightarrow f(1), f(4) \in \{0, 1\} \quad \checkmark$$

Luego, $n=1$ y $n=4$ me dan dos variantes cada uno.

Para $n=2$ y $n=3$ tengo que $h(n)=2$. Entonces, pido que

$$0 \leq f(2), f(3) \leq 2 \Leftrightarrow f(2), f(3) \in \{0, 1, 2\} \quad \checkmark$$

Luego, $n=2$ y $n=3$ me dan tres variantes cada uno.

Considero los casos $n \in \{6, 7, 8\}$. Como necesito que $8 \in \text{Im}(f)$, y $f(n) \neq 8 \forall n \in \{0, \dots, 5\}$, sé que al menos un $n \in \{6, 7, 8\}$ cumple que $f(n)=8$. Resuelvo por complemento.

Universo: $f(n) \in \{0, \dots, 8\}$ con $n \in \{6, 7, 8\}$ tiene 9 variantes por caso. Es decir, 9^3 posibilidades totales. $\checkmark$

Complemento: $f(n) \in \{0, \dots, 7\}$ con $n \in \{6, 7, 8\}$. O sea, en vez de pedir que alguno cumpla que $f(n)=8$, pido que no lo cumpla ninguno. Existen 8 variantes por caso, lo que me da 8^3 posibilidades. Se las resto a las del "universo". $\checkmark$

Entonces, los casos en los que $\exists n \in \{6, 7, 8\} / f(n)=8$ son $9^3 - 8^3$. Ahora calculo las variantes totales.

$$\text{Total: } \underbrace{1}_{n=0} \cdot \underbrace{2}_{n=1} \cdot \underbrace{3}_{n=2} \cdot \underbrace{1}_{n=3} \cdot \underbrace{2}_{n=4} \cdot \underbrace{3}_{n=5} \cdot \underbrace{(9^3 - 8^3)}_{n \in \{6, 7, 8\}} = 7812 \quad \checkmark$$

$$\therefore \# \{f \in \mathcal{F} / 8 \in \text{Im}(f) \wedge f \in h\} = 7812 \quad \blacksquare$$

Observación: las posibilidades se multiplican porque cada caso no es mutuamente excluyente con respecto del otro. $\checkmark$

Perfecto

2) Probar que $\prod_{i=1}^n \frac{10i-5}{2i} > n \cdot 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Con $n=1$, $\prod_{i=1}^1 \frac{10i-5}{2i} = \frac{10 \cdot 1 - 5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} > 1 \cdot 3^{1-1} = 1 \quad \checkmark \checkmark$

Con $n=2$, $\prod_{i=1}^2 \frac{10i-5}{2i} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 2 - 5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{8} = 9.375 > 2 \cdot 3^{2-1} = 6 \quad \checkmark \checkmark$

Inducción Corrida.

Proposición: $P(n) \quad \prod_{i=1}^n \frac{10i-5}{2i} > n \cdot 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Caso base.

Ver si vale el caso $P(3)$.

$\prod_{i=1}^3 \frac{10i-5}{2i} = \frac{75}{8} \cdot \frac{10 \cdot 3 - 5}{2 \cdot 3} = \frac{75}{8} \cdot \frac{25}{6} = 39.0625 > 3 \cdot 3^{3-1} = 27 \quad \checkmark \checkmark$

Luego, se cumple $P(3)$.

¿hiciste la cuenta en otra hoja y la pasaste? ¿Cómo supiste que si o si tenías que ver el caso $P(3)$?

Paso inductivo.

Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ fijo. Supongo que vale $P(k)$ y quiero probar que se cumple $P(k+1)$.

$P(k): \prod_{i=1}^k \frac{10i-5}{2i} > k \cdot 3^{k-1}$ (Hipótesis Inductiva, HI) $\checkmark$

$P(k+1): \prod_{i=1}^{k+1} \frac{10i-5}{2i} > (k+1) \cdot 3^{(k+1)-1} = (k+1) \cdot 3^k$ (lo que quiero demostrar) $\checkmark$

$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{10i-5}{2i} = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^k \frac{10i-5}{2i} \right\}}_{> k \cdot 3^{k-1}} \cdot \frac{10(k+1)-5}{2(k+1)} \stackrel{HI}{>} k \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{10k+5}{2(k+1)}$

Luego, quiero ver que $k \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{10k+5}{2(k+1)} \geq (k+1) \cdot 3^k$

$\Leftrightarrow \frac{10k^2+5k}{2(k+1)} \geq 3(k+1) \Leftrightarrow 10k^2+5k \geq 3(k+1)^2 \cdot 2$

$$\Leftrightarrow 10k^2 + 5k \geq 6k^2 + 12k + 6 \Leftrightarrow 4k^2 - 7k - 6 \geq 0.$$

Con $k=3$, $4k^2 - 7k - 6 = 9 \geq 0$. Además, como $4k^2 - 7k - 6$ es un polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ cuyo coeficiente principal es positivo ($4 > 0$), se que es estrictamente

creciente. Entonces, $4k^2 - 7k - 6 \geq 0 \quad \forall k \geq 3$.

↳ despierte su xiv. Antes es estricto decreciente.

verdad pero no por lo que despierte.

Luego, se cumple que con un $k \in \mathbb{N} \geq 3$ Ajo,

$$P(k) \Rightarrow P(k+1).$$

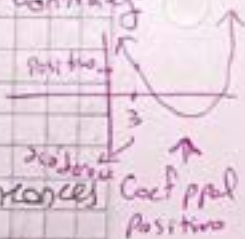
lo que tienes que hacer es buscar las raíces, o
Ver que estaban en la parte crec. y positiva usando

Entonces, como vale el caso base y el paso inductivo, los valores.

• vale la Proposición $P(n)$ por inducción correcta.

Contrary.

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n \frac{10i-5}{2i} > n \cdot 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \geq 3.$$



pero como vale también con $n=1$ y con $n=2$, entonces vale $\forall n \in \mathbb{N} \geq 3 \cup \{1, 2\} = \mathbb{N}$.

$$\therefore \prod_{i=1}^n \frac{10i-5}{2i} > n \cdot 3^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) Sea $n \in \mathbb{N}$.

a) Probar que $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow n \equiv 1 (5)$

$\Leftrightarrow$ Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \equiv 1 (5)$ Quiero ver que $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0 (5)$.

Como $81 \equiv 1 (5) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1 (5) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $n \equiv 1 (5) \Rightarrow n^3 \equiv 1^3 (5)$ y $n^2 \equiv 1^2 (5)$.

$$\text{Luego, } 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 - 45 - 11 \cdot 1^3 - 22 \cdot 1 - 33 \cdot 1^2$$

$$\equiv -110 \equiv 0 (5). \text{ Entonces, probé que con un } n \in \mathbb{N} \text{ tal}$$

que $n \equiv 1 (5)$, entonces $5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$.

$$\Rightarrow 5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \equiv 1(5)$$

$$5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0(5)$$

Como $81 \equiv 1(5) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad y \quad -45 \equiv 0(5), \quad \checkmark$

$$81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 0(5)$$

Como $-11 \equiv 4(5), \quad -22 \equiv 3(5) \quad y \quad -33 \equiv 2(5), \quad \checkmark$

$$1 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 + 4n^3 + 3n + 2n^2 \equiv 0(5)$$

$$\Leftrightarrow 4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv -1 \equiv 4(5)$$

Hago una tabla de restos módulo 5 para buscar los $n \in \mathbb{N}$ tales que $4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv 4(\text{mod } 5)$.

$n \equiv 0$	1	2	3	4
$3n \equiv 0$	3	1	4	2
$n^2 \equiv 0$	1	4	4	1
$2n^2 \equiv 0$	2	3	3	2
$n^3 \equiv 0$	1	3	2	4
$4n^3 \equiv 0$	4	2	3	1
$4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv 0$	4	1	0	0

se restaría

se restaría

luego, $4n^3 + 2n^2 + 3n \equiv 4(5) \Leftrightarrow n \equiv 1(5) \quad \checkmark$ Entonces,

con $n \in \mathbb{N} / 5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Rightarrow n \equiv 1(5)$.

Como demostré $\Rightarrow$ y $\Leftarrow$, entonces vale $\Leftrightarrow$

$$\therefore 5 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \Leftrightarrow n \equiv 1(5) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

La tabla de restos cubre todas las posibilidades, luego equivale a demostrar el $\Leftrightarrow$.

3)b) Calcular $(81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Defino $d = (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 : 30)$ Por la definición del MCD, sé que $d | (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2)$ y que $d | 30$. Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, verifico la divisibilidad de $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2$ por 2, 3 y por 5.

En primer lugar, por el ejercicio anterior, sé que $5 | (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2) \Leftrightarrow n \equiv 1(5)$.

Entonces, como $5 | 30$ y $5 | (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2)$ con $n \equiv 1(5)$, entonces $5 | d$ si $n \equiv 1(5)$.

Ahora analizo Congruencia módulo 2.

$$\rightarrow 81 \equiv 1(2) \Rightarrow 81^n \equiv 1^n \equiv 1(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\rightarrow 45 \equiv 1(2), \quad -11 \equiv 1(2), \quad -22 \equiv 0(2), \quad -33 \equiv 1(2).$$

$$\text{Luego, } 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv 1 + 1 + n^3 + 0 \cdot n + n^2(2).$$

Como $1 + 1 \equiv 2 \equiv 0(2)$ y $0 \cdot n \equiv 0(2)$, tengo que $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv n^3 + n^2(2)$. Ya sé que esto

vale para cualquier $n \in \mathbb{N}$ pues, si n es par, es "trivial" y, si n es impar, entonces n^3 y n^2 serán impares, y su suma será par. Por las dudas, comprobalo con una tabla de restos.

$n \equiv 0$	1
$n^2 \equiv 0$	1 (mód 2)
$n^3 \equiv 0$	1
$n^3 + n^2 \equiv 0$	0

$$\text{Luego, } 2 | (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $2 | 30$, entonces $2 | d$. Esto vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora analizo congruencia modulo 3.

$$81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv -11n^3 - 22n \pmod{3} \text{ pues}$$

$$81^n \equiv 3^{4n} \equiv 0 \pmod{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad -45 \equiv -33 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Pero como $-11 \equiv 1 \pmod{3}$ y $-22 \equiv 2 \pmod{3}$,

$$-11n^3 - 22n \equiv n^3 + 2n \pmod{3}.$$

Puesto los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^3 + 2n \equiv 0 \pmod{3}$ con una Tabla de verdad.

$n \equiv$	0	1	2
$2n \equiv$	0	2	1
$n^3 \equiv$	0	1	1
$n^3 + 2n \equiv$	0	0	0

Luego, se cumple que $n^3 + 2n \equiv 0 \pmod{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, como $81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \equiv n^3 + 2n \equiv 0 \pmod{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se que $3 \mid 81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, como $3 \mid 30$, se que $3 \mid d$. Esto vale $\forall n \in \mathbb{N}$. ✓

Recomiendo, tengo que

$$1) 2 \mid d \wedge 3 \mid d \wedge 5 \mid d \quad \text{si} \quad n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2) 2 \mid d \wedge 3 \mid d \wedge 5 \nmid d \quad \text{si} \quad n \not\equiv 1 \pmod{3}$$

En el primer caso, $2 \cdot 3 \cdot 5 \mid d \Leftrightarrow 30 \mid d$. Como $d \mid 30$, se que $d = 30$. En el segundo caso, $2 \cdot 3 \mid d \Leftrightarrow 6 \mid d$ como $d \mid 30$ y $5 \nmid d$, se que $d = 6$. (*) (deberias de lo hago o).

$$\therefore (81^n - 45 - 11n^3 - 22n - 33n^2 - 30) = \begin{cases} 30 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 6 & \text{si } n \not\equiv 1 \pmod{3} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Notar que $n \not\equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3} \vee n \equiv 2 \pmod{3} \vee n \equiv 3 \pmod{3} \vee n \equiv 4 \pmod{3}$.

Como se ve.

$$\text{Con } n=1, d = (81^1 - 45 - 11 \cdot 1^3 - 22 \cdot 1 - 33 \cdot 1^2 : 30) = (-30 : 30) = 30$$

$$\text{Con } n=2, d = (81^2 - 45 - 11 \cdot 2^3 - 22 \cdot 2 - 33 \cdot 2^2 : 30) = (6318 : 30)$$

• Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $6318 = 2 \cdot 3 \cdot 1053$ y $\nmid 6318$,
entonces $d = 2 \cdot 3 = 6$. ✓

4) Determinar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
 $n \in 70000$ $(n : 5184) = 1728$ $\# \text{Div}_+(n) = 56$

$$\rightarrow 5184 = 2^6 \cdot 3^4 = 3 \cdot 1728$$

$$\rightarrow 1728 = 2^6 \cdot 3^3$$

Como $(n : 5184) = 1728$, se que $1728 \mid n$ ✓ y que
 $1728 \cdot 3 \nmid n$ ✓ Luego, por el TFA, tengo que

$$n = 2^{r_2} \cdot 3^{r_3} \cdot 5^{r_5} \cdots \text{ con } r_i \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ primo.} \quad \checkmark$$

Luego, como $2^6 \cdot 3^3 \mid n$, se que

$$r_2 \geq 6 \quad \text{y} \quad r_3 \geq 3$$

Sin embargo, como $\frac{3 \cdot 2^6 \cdot 3^3}{5184} \nmid n$, se que $r_3 < 4$

Entonces, $r_3 = 3$ ✓ Luego, también se que

$$\# \text{Div}_+(n) = (r_2+1)(r_3+1)(r_5+1) \cdots$$

Pero como $r_3 = 3$ y $\# \text{Div}_+(n) = 56$ (por el enunciado),

$$56 = (r_2+1)(3+1)(r_5+1) \cdots \Leftrightarrow 14 = (r_2+1)(r_5+1)(r_7+1) \cdots$$

Luego, como $r_2 \geq 6 \Leftrightarrow r_2+1 \geq 7$, se que

$$(r_2+1)(r_5+1)(r_7+1) \cdots \geq 7(r_5+1)(r_7+1) \cdots$$

$$\Leftrightarrow 14 \geq 7(r_5+1)(r_7+1) \cdots \Leftrightarrow 2 \geq (r_5+1)(r_7+1) \cdots$$

Luego, como $r_i \geq 0 \forall i \in \mathbb{N}$ primo, se que

$$r_i + 1 \geq 1 \forall i \Rightarrow (r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots \geq 1.$$

$$\text{Entonces, } (r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots \in \{1, 2\}.$$

$$\cdot) (r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots = 1 \Rightarrow r_i = 0 \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 5} \text{ primo.}$$

Luego, $n = 2^{r_2} \cdot 3^3$. También tenía que

$$14 = (r_2 + 1)(r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots \Rightarrow 14 = (r_2 + 1) \cdot 1 \Rightarrow r_2 = 13.$$

$$\text{Luego, } n = 2^{13} \cdot 3^3 = 221184 > 20000.$$

Pero necesitamos que $n \leq 20000$, así que descarto este caso.

$$\cdot) (r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots = 2 \Rightarrow \exists! i \in \mathbb{N}_{\geq 5} \text{ primo} / r_i \neq 0 \wedge r_i = 1.$$

Esta es porque 2 es primo y todos los factores de $(r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots$ deben ser iguales a 1 excluyendo uno, que será igual a 2. Entonces, $\exists! i \in \mathbb{N}_{\geq 5} \text{ primo} / r_i + 1 \neq 1 \wedge r_i + 1 = 2$ implica mi afirmación anterior.

Voy a llamar p al único i que cumple que $r_i = 1$.

$$\text{Entonces, } n = 2^{r_2} \cdot 3^3 \cdot p^1 \text{ y tenía que}$$

$$14 = (r_2 + 1)(r_5 + 1)(r_7 + 1) \dots \Rightarrow 14 = (r_2 + 1) \cdot 2 \Rightarrow r_2 = 6$$

$$\text{Luego, } n = 2^6 \cdot 3^3 \cdot p \text{ con } p \in \mathbb{N}_{\geq 5} \text{ primo. Busco los } p \text{ tales que } n \leq 20000.$$

$$n \leq 20000 \Leftrightarrow 2^6 \cdot 3^3 \cdot p \leq 20000 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot p \leq 625$$

$$\Rightarrow p \leq \left\lfloor \frac{625}{36} \right\rfloor \Rightarrow p \leq 17. \Rightarrow p \in \{5, 7, 11, 13, 17\}.$$

Los números primos

$$\therefore n \in \{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5, 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7, 2^6 \cdot 3^3 \cdot 11, 2^6 \cdot 3^3 \cdot 13, 2^6 \cdot 3^3 \cdot 17\}.$$

Perfecto.

(*) Del primer caso, tengo que $30|d$ y $d|30$. Entonces,

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} / 30 \cdot k_1 = d \wedge d \cdot k_2 = 30$$

$$\Rightarrow 30 \cdot k_1 \cdot k_2 = 30 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 1.$$

Pero $\exists! (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 / k_1 \cdot k_2 = 1$ y se que $k_1 = k_2 = 1$.

$$\text{Luego, } d = 1 \cdot 30 = 30. \checkmark$$

Del segundo caso, tengo que $6|d \wedge 5|d$ y $d|30$. luego,

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \setminus \{5\} / 6k_1 = d \text{ y } \exists k_2 \in \mathbb{N} / dk_2 = 30$$

$$\Rightarrow 6k_1 k_2 = 30 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 5.$$

Como $k_1 \neq 5$ y 5 es primo, $k_1 = 1$ y $k_2 = 5$.

$$\text{Luego, } d = 6 \cdot 1 = 6. \checkmark$$