

1	2	3	4
B	B	B	R+

NOTA
9

Recuperatorio 1er Parcial Álgebra I - viernes 11 de julio

APELLIDO: *Guevara*TURNO PRÁCTICO: *2*NOMBRE: *Paloma*LIBRETA: XXXXXXXXXXCARRERA: *Cs de la Computación*1. Definimos en $\mathbb{N}$ la siguiente relación: $a \sim b \iff$ la suma de las cifras de a es igual a la suma de las cifras de b .

- (a) Probar que la relación es de equivalencia pero no es relación de orden.
- (b) Calcular la cantidad de números naturales entre 1 y 10000 que pertenecen a la clase de equivalencia del número 1100.
- (c) Calcular la cantidad de clases de equivalencia que hay entre los números del 1 al 999 incluidos.

2. Probar que $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{i^3} < 2 - \frac{2}{(n+1)^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.3. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que ni 3 ni 7 dividen a $a^2 - 1$. Probar que $3^3 \cdot 7$ divide a $a^2(a^2 + 3)(a^2 + 5)$.4. Sabiendo que $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a : b) = 5$, calcular los posibles valores de $(a^4 + b^4 : 2a^2b)$. Exhibir un ejemplo en cada caso.

Justifique todas sus respuestas.

1) Definir en N la siguiente relación:

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{la suma de las cifras de } a \text{ es igual a la suma de las cifras de } b$$

a) Probar que la relación es de equivalencia pero no es de orden

b) Calcular la cantidad de números naturales entre 1 y 1000 que pertenecen a la clase de equivalencia del número 1100

c) Calcular la cantidad de clases de equivalencia que hay entre los números del 1 al 999 inclusive

sol:

b) $\overline{1100} = \overline{2}$ necesito la cantidad de números naturales ≤ 1000 cuya suma de cifras sea 2 (1000 no cuenta)

Para no contar repetidos por cero o la siguiente, considero los siguientes casos:

- número entre 1 y 9 $\sim$ solo cumple el 2: ~~1 caso~~ ^{1 caso}
 - número entre 10 y 99 $\sim$ solo cumple el 11 y el 20: 2 casos
 - número entre 100 y 999 $\sim$ cumple: 110, 101, 200: 3 casos
 - número entre 1000 y 9999 $\sim$ cumple: 1001, 1010, 1100: 4 casos
- $\Rightarrow$ hay 10 números 2000

Otra forma equivalente es tomar 2 cifras de 4 para que sea = 1 y los demás 0, y sumar el caso donde no vale cifra es 2: $\binom{4}{2} + 4 = 6 + 4 = 10$ ✓

[• hay 10 números entre 1 y 10000 en la clase del 1100]

a) Para que la relación sea la equivalencia, debe ser reflexiva, simétrica, y transitiva, y como que no se le ordena, no debe ser antisimétrica.

• Reflexiva: $a \sim a \Leftrightarrow$ ^{num} ~~es~~ la suma de $a =$ ^{num} ~~es~~ la suma de a

Esto siempre se cumple en cualquier base

$\Rightarrow$ la relación es reflexiva ✓

• Transitiva: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$a \sim b \Leftrightarrow \sum \text{digitos}(a) = \sum \text{digitos}(b)$$

$$b \sim c \Leftrightarrow \sum \text{digitos}(b) = \sum \text{digitos}(c)$$

Como es una igualdad entre números naturales, se cumple

$\sum \text{digitos}(a) = \sum \text{digitos}(c) \Rightarrow$ la relación es transitiva ✓

• Simétrica: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$$a \sim b \Leftrightarrow \sum \text{digitos}(a) = \sum \text{digitos}(b)$$

Se ve claro, como es una igualdad entre números, vale que

$\sum \text{digitos}(b) = \sum \text{digitos}(a) \Leftrightarrow b \sim a \Rightarrow$ la relación es simétrica ✓

• Antisimétrica: $a \sim b, a \neq b \Rightarrow b \not\sim a$

Por contraejemplo: $1001 \sim 101, 1001 \neq 101$

pero $101 \not\sim 1001$ ~~pero~~ $1+0+1 \neq 1+0+0+1$ ✓

$$\Rightarrow 101 \not\sim 1001$$

Por lo tanto, la relación no es antisimétrica

• La relación es la equivalencia y no se ordena

Palom
Guevarra

c) Entre 1 y 9 hay 9 dígitos le equivalencia
(ya que solo hay un dígito)

~~Alrededor hay 10 dígitos, pero cada dígito~~

Con un segundo dígito, cada vez que uno se aumenta
la cantidad de dígitos, y lo mismo con el tercer dígito.
por lo tanto, debe haber 27 dígitos le equivalencia:

$$\cdot \bar{1} = \{1, 10, 100\} - \# \bar{1} = \binom{3}{1} \text{ (elegir 1 dígito para que sea 1)} \\ \text{de 3 dígitos posibles}$$

$$\cdot \bar{2} = \{2, 11, 20, 110, 101, 200\} - \# \bar{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 6$$

$$\cdot \bar{3} = \{3, 12, 21, 110, 102, 201, 300\} - \# \bar{3} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 10$$

$$\# \bar{3} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 1 + 3 + 6 = 10$$

3 dígitos
no 7
2 3
1 dígito es 1
2 dígitos 2

Clase:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 ... 29

39

99

199

299

999

2) Probar que $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^3} < 2 - \frac{2}{(n+1)^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

sol:

Caso base: $n=1$ $\sum_{i=2}^2 \frac{1}{i^3} = \frac{1}{8} < 2 - \frac{2}{4} = \frac{6}{4} \checkmark n=1$ cumple

Por inducción

H.I: $\sum_{i=2}^{h+1} \frac{1}{i^3} < 2 - \frac{2}{(h+1)^2}$ con $1 \leq h \leq n$

q.p.q: $\sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i^3} < 2 - \frac{2}{(n+2)^2}$

$\sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i^3} = \frac{1}{(n+2)^3} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^3} < \frac{1}{(n+2)^3} + \left(2 - \frac{2}{(n+1)^2}\right)$

$\frac{1}{(n+2)^3} + 2 - \frac{2}{(n+1)^2} = 2 \left[\frac{-4(n+1)^2 + 2(n+2)^3}{(n+2)^3(n+1)^2} \right]$ Para llegar a lo que quiero probar necesito que esto sea $\leq -\frac{2}{(n+2)^2}$

necesito que $\frac{-4(n+1)^2 + 2(n+2)^3}{(n+2)^3(n+1)^2} \leq -\frac{2}{(n+2)^2}$

Osea, desarrollando: $\frac{-4n^2 - 8n + 4 + 2n^3 + 12n^2 + 24n + 16}{(n+2)^3(n+1)^2} \leq -\frac{2}{(n+2)^2}$

$\Rightarrow -\frac{8n^2 + 16n + 12 + 2n^3}{(n+2)(n+1)^2} \leq -2$

$\Rightarrow -(8n^2 + 16n + 12 + 2n^3) \leq -2(n+2)(n+1)^2$

$\Rightarrow 2n^3 + 8n^2 + 16n + 12 \geq 2n^3 + 8n^2 + 10n + 4$

$\Rightarrow 6n + 8 \geq 0 \rightarrow$ cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Por lo tanto:

$\sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i^3} < 2 - \frac{2}{(n+2)^2}$

por ende:

$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^3} < 2 - \frac{2}{(n+1)^2}$ cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

3) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que ni 3 ni 7 divide a a^2-1
 probar que $3^3 \cdot 7$ divide a $a^2(a^2+3)(a^2+5)$

sol:

factor: $3 \nmid a^2-1$ $7 \nmid a^2-1$

$$3 \nmid a^2-1 \Leftrightarrow a^2-1 \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ busco posibles } a:$$

a	a ²	a ² -1
0	0	2 ← no
1	1	0
2	1	0

entonces $3 \nmid a^2-1 \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow a = 3K$ con $K \in \mathbb{Z}$

$7 \nmid a^2-1$ lo puedo reescribir como $7 \nmid (3K)^2-1$

o sea $7 \nmid 9K^2-1 \Leftrightarrow 9K^2-1 \not\equiv 0 \pmod{7}$ nuevamente busco posibles K
 $\equiv 2K^2$

K	K ²	2K ²	2K ² -1
0	0	0	6
1	1	2	5
2	4	1	0 ← no va
3	2	4	3
4	2	4	3
5	4	1	0 ← no va
6	1	2	1

o sea $K \neq 2 \pmod{7}$ y $K \neq 5 \pmod{7}$

sea c tal que $c \in \{0, 1, 3, 4, 6\}$

$\Rightarrow a = 3 \cdot (7q + c) = 21q + 3c$ con $q \in \mathbb{Z}$

habiendo encontrado una forma general, pasado a la demostración:

si $3^3 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5)$ y $7 \nmid a^2(a^2+3)(a^2+5)$

entonces $3^3 \cdot 7 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5)$

$\Rightarrow$ [me fijo 3] $3^3 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5) \Leftrightarrow a^2(a^2+3)(a^2+5) \equiv 0 \pmod{3^3}$

$a^2 = 9 \cdot 3^2 \cdot K^2 \Rightarrow 3^2 \cdot K^2 \cdot (3^2 \cdot K^2 + 3) (3^2 \cdot K^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3^3}$

factorizando:

no factor común 3

$\Rightarrow 3^3 \cdot K^2 (3K^2 + 1) (3^2 \cdot K^2 + 5) \equiv 0 \pmod{3^3} \Rightarrow 0 \equiv 0 \checkmark$

$\equiv 0$

como hay un 0 a factor, se cumple todo

se cumple

[me fijo 7]

$7 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5) \Leftrightarrow a^2(a^2+3)(a^2+5) \equiv 0 \pmod{7}$

~~$$a^2(a^2+3)(a^2+5) \equiv 0 \pmod{7}$$~~

Retenir la conclusión anterior de que $a = 21q + 3r$

Con $q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{0, 1, 3, 4, 6\}$ y chequeo cada valor

de r si me da $\equiv 0 \pmod{7}$. Reemplazo a :

$$\bullet \underbrace{(21q+3r)}_{\equiv 0}^2 \left(\underbrace{(21q+3r)}_{\equiv 0}^2 + 3 \right) \left(\underbrace{(21q+3r)}_{\equiv 0}^2 + 5 \right) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 9r^2(r^2+3)(r^2+5) \equiv 0 \pmod{7}$$

• si $r \equiv 0 \Rightarrow \cancel{0} \cdot (3) \cdot (5) \equiv 0 \pmod{7}$ se cumple

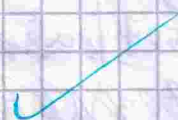
• si $r \equiv 1 \Rightarrow 9(12)(14) \equiv 0 \pmod{7}$ se cumple

• si $r \equiv 3 \Rightarrow \underbrace{9 \cdot 9}_{\equiv 4} (\underbrace{9 \cdot 9 + 3}_{\equiv 0}) (\underbrace{9 \cdot 9 + 5}_{\equiv 4}) \equiv 4 \cdot 7 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{7}$ se cumple

• si $r \equiv 4 \Rightarrow \underbrace{9 \cdot 16}_{\equiv 4} (\underbrace{9 \cdot 16 + 3}_{\equiv 4}) (\underbrace{9 \cdot 16 + 5}_{\equiv 4}) \equiv 4 \cdot 7 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{7}$ se cumple

• si $r \equiv 6 \Rightarrow \underbrace{9 \cdot 36}_{\equiv 2} (\underbrace{9 \cdot 36 + 3}_{\equiv 2}) (\underbrace{9 \cdot 36 + 5}_{\equiv 2}) \equiv 2 \cdot 2 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7}$ se cumple

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \bullet \text{ Como } 3^3 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5) \text{ y } 7 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5) \\ \text{se Concluye que } 3^3 \cdot 7 \mid a^2(a^2+3)(a^2+5) \end{array} \right]$$



4) Sabiendo que $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a:b)=5$ calcular los posibles valores de $(a^4+b^4 : 2a^2b)$. Exhibir un ejemplo para cada caso.

sol:

$$\text{llamo } d = (a^4+b^4 : 2a^2b)$$

Primero: $a = 5a'$ $b = 5b'$ $a' \perp b'$

$$\Rightarrow d = (5^4 \cdot a'^4 + 5^4 \cdot b'^4 : 2 \cdot a'^2 \cdot b' \cdot 5^2 \cdot 5)$$

$$\Rightarrow d = 5^3 (5 \cdot a'^4 + 5 b'^4 : 2 \cdot a'^2 \cdot b') = 5^3 \cdot d'$$

$$\Rightarrow d' \mid 5(a'^4 + b'^4)$$

$$d' \mid 2a'^2 b'$$

↓ notación por 5 o 2 o 10

$$\text{si } 2 \mid d' :$$

$$2 \mid 5(a'^4 + b'^4) \Leftrightarrow 5(a'^4 + b'^4) \equiv 0 \pmod{2}$$

$$5(a'^4 + 5b'^4) \equiv a'^4 + b'^4 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow a' \equiv -b' \pmod{2}$$

$$\Rightarrow a' \equiv b' \pmod{2} \quad a' \text{ y } b' \text{ no pueden ser ambos pares, pues } a' \perp b'$$

$$\Rightarrow a' \text{ y } b' \text{ no impares}$$

$$\text{si } 5 \mid d' :$$

$$5 \mid 2a'^2 b' \Leftrightarrow 2a'^2 b' \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow a'^2 \cdot b' \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow a'^2 \equiv 0 \pmod{5} \text{ o } b' \equiv 0 \pmod{5} \text{ (pero no ambos)}$$

$$\text{o sea } a' \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{si } 2 \nmid d' \text{ y } 5 \nmid d'$$

$$\Rightarrow d' \mid a'^4 + b'^4$$

$$d' \mid a'^2 \cdot b'$$

si $d' \nmid 1$ se puede tener que $d' \mid b'$, entonces d' debe ser 1

~~$$d' \mid a'^4 + b'^4 \Rightarrow d' \mid a'^4 + b'^4 - b'^4 = a'^4$$~~

si $d' \neq 1 \Rightarrow d' \mid a'^4$ y que en ese caso también divide a b'^4 pero $a' \perp b'$

$\Rightarrow$ si solo puede ser $= a$ 1, 2, 5 o 10

$\Rightarrow$ si solo puede ser $5^3, 2 \cdot 5^3, 5^4, 2 \cdot 5^4$

¿Cómo llegas a estos valores?

Ejemplo de como como:

$$\begin{aligned} d = 5^3 (10, 15) &: (10^4 + 15^4 : 2 \cdot 10^2 \cdot 15) = (60625 : 3000) \\ &= 5^3 (485 : 24) = 5^3 (5.97 : 6.4) = \underline{5^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = 2 \cdot 5^3 (15, 35) &: (15^4 + 35^4 : 2 \cdot 15^2 \cdot 35) = \\ &= (5^4 \cdot 2 \cdot 1241 : 5^3 \cdot 2 \cdot 63) = 5^3 \cdot 2 \cdot (51241 : 63) \\ &= \underline{5^3 \cdot 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = 5^4 (10, 125) &: (10^4 + 125^4 : 2 \cdot 10^2 \cdot 125) \\ &= (5^4 \cdot 390641 : 5^4 \cdot 40) = \\ &= 5^4 (390641 : 40) = \underline{5^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d = 2 \cdot 5^4 (15, 125) &= (15^4 + 125^4 : 2 \cdot 15^2 \cdot 125) \\ &= (2 \cdot 5^4 \cdot 195353 : 2 \cdot 5^4 \cdot 45) \\ &= 2 \cdot 5^4 (195353 : 45) \\ &= \underline{2 \cdot 5^4} \end{aligned}$$