

Tema 2

1	2	3	4
B	B	B	B

NOTA
10

Recuperatorio 1er Parcial Álgebra I - viernes 11 de julio

APELLIDO: BELO

TURNO PRÁCTICO: 3

NOMBRE: GIULIANA

LIBRETA:

CARRERA: LIC. EN CS. DE
LA COMPUTACIÓN

1. Definimos en $\mathbb{N}$ la siguiente relación:

$a \sim b \iff$ la suma de las cifras de a es igual a la suma de las cifras de b .

- (a) Probar que la relación es de equivalencia pero no es relación de orden.
- (b) Calcular la cantidad de números naturales entre 1 y 10000 que pertenecen a la clase de equivalencia del número 1010.
- (c) Calcular la cantidad de clases de equivalencia que hay entre los números del 1 al 999 incluidos.

2. Probar que $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{6}{i^3} < 3 - \frac{3}{(n+1)^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que ni 3 ni 7 dividen a $a^2 - 1$. Probar que $3^4 \cdot 7$ divide a $a^3(a^2 + 3)(a^2 + 5)$.

4. Sabiendo que $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a : b) = 5$, calcular los posibles valores de $(a^4 + b^4 : 2ab^2)$. Exhibir un ejemplo en cada caso.

Justifique todas sus respuestas.

① EN IN LA RELACIÓN

$a \sim b \Leftrightarrow$ LA SUMA DE LAS CIFRAS DE a
ES IGUAL A LA SUMA DE LAS CIFRAS DE b

a) PROBAR QUE ES RELACIÓN DE EQUIVALENCIA PERO NO
DE ORDEN

- TIENE QUE SER REFLEXIVA, SIMÉTRICA Y TRANSITIVA PERO
NO SER ANTISIMÉTRICA ✓

REFLEXIVIDAD $a \sim a$ $\forall a \in \mathbb{N}$

SIEMPRE SE CUMPLE, PUES LA SUMA DE LAS CIFRAS
DE UN NÚMERO ES ÚNICA $\rightarrow$ Si...

*podrías decir que le estás
tomando suma de cifras
al mismo número.*

LUEGO, LA RELACIÓN ES REFLEXIVA.

SIMETRÍA $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

TAMBIÉN SE CUMPLE, SI LLAMO c A LA SUMA DE
CIFRAS DE a Y d A LA DE b , TENGO:

$$a \sim b \Leftrightarrow c = d$$

SI $a \sim b$, c Y d SON IGUALES

Y $b \sim a \Leftrightarrow d = c$, ESTO SIEMPRE VALE YA QUE
SE TRATA DE UNA IGUALDAD. ✓

LUEGO, LA RELACIÓN ES SIMÉTRICA ✓

• ANTISIMETRÍA $(a \sim b \wedge b \sim a) \Leftrightarrow a = b$

→ CONTRA EJEMPLO $a = 23$ $b = 212$

$$a \sim b \text{ PUES } 2+3 = 2+1+2 \\ 5 = 5 \quad \checkmark$$

$$\text{Y } b \sim a \text{ PUES } 2+1+2 = 2+3 \\ 5 = 5 \quad \checkmark$$

$$\text{PERO } 23 \neq 212 \quad \checkmark$$

LUEGO, LA RELACIÓN NO ES ANTISIMÉTRICA (Y TAMPOCO DE ORDEN) $\checkmark$

• TRANSITIVIDAD $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$

ESTO SE VE DE IGUAL FORMA QUE LA SIMETRÍA (EN ESTE CASO). LLAMO α , β Y γ A LAS SUMAS DE CIFRAS DE a , b Y c

$$a \sim b \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$b \sim c \Leftrightarrow \beta = \gamma$$

$$\begin{pmatrix} a \rightarrow \alpha \\ b \rightarrow \beta \\ c \rightarrow \gamma \end{pmatrix}$$

COMO AMBAS OCURREN SIMULTÁNEAMENTE, $\alpha = \gamma \Leftrightarrow a \sim c \quad \checkmark$

LUEGO, LA RELACIÓN ES TRANSITIVA. ADEMÁS, COMO ES REFLEXIVA Y SIMÉTRICA, ES DE EQUIVALENCIA. $\checkmark$

b) CALCULAR LA CANTIDAD DE $n \in \mathbb{N}$ ENTRE 1 Y 10000 QUE PERTENECEN A LA CLASE DE EQUIVALENCIA DEL NÚMERO 1010.

LA CLASE DE EQUIVALENCIA DEL 1010 ESTÁ DADA POR EL 2, QUE ES LA SUMA DE SUS CIFRAS.

↳ ¿qué significa esto frase? Obien es "es la misma que 2, la del 2",
o "está dada por los números que suma de cifras es 2".

CONTINUO CON (1) b)

QUIERO SABER CUÁNTOS NÚMEROS $\in [1, 10000]$ TIENEN
COMO SUMA DE SUS CIFRAS AL 2 ✓

SEPARO POR CANTIDAD DE DÍGITOS.

1 DÍGITO $\{2\}$ 1 NÚMERO ✓

2 DÍGITOS $2+0$, $0+2$, $1+1 \rightarrow 2$ NÚMEROS $20, 11$
 $\hookrightarrow$ TIENE 1 DÍGITO, LO DESCARTO

3 DÍGITOS $2+0+0$, $1+1+0$, $1+0+1 \rightarrow 3$ NÚMEROS $200, 110, 101$

4 DÍGITOS $2+0+0+0$, $1+1+1+1 \rightarrow 1 + 3 \rightarrow 4$ NÚMEROS $2000, 1001, 1010, 1100$
 $\nwarrow$ FIJO PARA TENER 4 DÍGITOS
 $\bullet$ 2 CEROS
 $\bullet$ 1 UNO
 $\searrow$ 3 POSIBLES POSICIONES DEL 1 PARA SUMAR 2

NO HAY $n > 2000$ QUE CUMPLA EN EL RANGO.

LUEGO, HAY 10 NÚMEROS NATURALES EN LA CLASE DE EQUIVALENCIA DEL 1010 (1010 ES UNO DE ELLOS). ✓
 $\nearrow 1+2+3+4$

c) CANTIDAD DE CLASES DE EQUIVALENCIA EN $\{1, \dots, 999\}$

HAY 27 CLASES DE EQUIVALENCIA YA QUE EL MAYOR NÚMERO QUE SE PUEDE OBTENER ES $9+9+9 = 27$ (El menor 1)

(COMO VIMOS EN b, LA CLASE DE EQUIVALENCIA ESTÁ DADA POR LA SUMA DE LOS DÍGITOS DE UN NÚMERO)

Bien, podría estar más claramente escrito que todo otro núm. en $\{1, \dots, 999\}$ está en uno de esos.

② PROBAR QUE $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{6}{i^3} < 3 - \frac{3}{(n+1)^2}$ PARA TODO $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \sum_{i=2}^{n+1} \frac{6}{i^3} < 3 - \frac{3}{(n+1)^2} \quad \checkmark$$

CASO BASE $n=1$

$$\sum_{i=2}^{1+1} \frac{6}{i^3} < 3 - \frac{3}{(1+1)^2}$$

$$2^3 = 8.$$

$$\frac{6}{2^3} = \frac{3}{4} < 3 - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{6}{4} \quad \checkmark$$

OK, sí, pero
cambiate
los números.

PASO INDUCTIVO $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ SUPONGO QUE $P(n)$ ES VERDADERA Y QVQ VALE $P(n+1)$

$$P(n+1): \sum_{i=2}^{(n+1)+1} \frac{6}{i^3} < 3 - \frac{3}{((n+1)+1)^2}$$

POR HI

$$\star = \sum_{i=2}^{n+2} \frac{6}{i^3} = \frac{6}{(n+2)^3} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{6}{i^3} < \frac{6}{(n+2)^3} + \left(3 - \frac{3}{(n+1)^2} \right)$$

BASTA CON PROBAR:

$$\frac{6}{(n+2)^3} + 3 - \frac{3}{(n+1)^2} < 3 - \frac{3}{(n+2)^2} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{(n+2)^3} - \frac{3}{(n+1)^2} < -\frac{3}{(n+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{-3}{(n+2)^2} + \frac{3}{(n+1)^2} - \frac{6}{(n+2)^3} \quad \cdot (n+2)^3 \cdot (n+1)^2$$

$$0 < -3(n+2)(n+1)^2 + 3(n+2)^3 - 6(n+1)^2$$

$$0 < 9n + 12 \quad \checkmark \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↓
Pues $n > 0$.

CA HOJA
APARTE

COMO TENGO CASO BASE $P(1) \checkmark$ Y $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ QUEDA
DEMOSTRADO POR INDUCCION QUE $P(n)$ VALE PARA TODO $n \in \mathbb{N}$ 

$$\underbrace{(-3+3)}_{0} n^3 + \underbrace{(-12+18-6)}_{0} n^2 + (-15+36-12) n + (-6+24-6) = 9n + 12$$

③ SEA $a \in \mathbb{Z}$ TAL QUE NI 3 NI 7 DIVIDEN A $a^2 - 1$.

PROBAR QUE $3^4 \cdot 7$ DIVIDE A $a^3(a^2+3)(a^2+5)$

$$\begin{aligned} a^3(a^2+3)(a^2+5) &= a^3(a^4 + 5a^2 + 3a^2 + 15) \\ &= a^7 + 5a^5 + 3a^5 + 15a^3 \\ &= a^7 + 8a^5 + 15a^3 \end{aligned}$$

• $7 \nmid a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$

TABLA DE RESTOS

a	1	2	3	4	5	6	0
a ²	1	4	2	2	4	1	0

$\Leftrightarrow a \not\equiv 1 \pmod{7} \vee a \not\equiv 6 \pmod{7}$

• $3 \nmid a^2 - 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$

TDR

a	1	2	0
a ²	1	1	0

$\Leftrightarrow a \not\equiv 1 \pmod{3} \vee a \not\equiv 2 \pmod{3}$

$a \equiv 0 \pmod{3}$

PUEDO ESCRIBIRLO COMO $3 \cdot A$

ENTONCES $a^7 + 8a^5 + 15a^3 = *$

$* 3^7 \cdot A^7 + 8 \cdot 3^5 \cdot A^5 + 15 \cdot 3^3 \cdot A^3$

$= 3^7 \cdot A^7 + 2^3 \cdot 3^5 \cdot A^5 + 3^4 \cdot 5 \cdot A^3 = 3^4 (3^3 \cdot A^7 + 2^3 \cdot 3 \cdot A^5 + 5A^3)$

$\hookrightarrow 3^4 \mid a^3(a^2+3)(a^2+5)$

SIEMPRE.

~~SE QUE $A \not\equiv 1 \pmod{7}$ $\vee$ $A \not\equiv 6 \pmod{7}$~~

~~SI $A \equiv 0 \pmod{7}$, $3^7 \cdot A^7 + 2^3 \cdot 3^5 \cdot A^5 + 5A^3 \equiv 0 \pmod{7}$~~

~~QUEDARÍA VER $7 \mid M$ CON $A \equiv 2, 3, 4, 5 \pmod{7}$~~

(ME CONFUNDÍ DE NÚMERO, SE TOMA EL ORIGINAL ATRÁS.)

OK.

MÓDULO 7

$$3^3 a^7 + 2^3 \cdot 3 a^5 + 5 a^3 \equiv 0 \pmod{7}$$

QUEDA VER QUE $7 \mid a^7 + 8a^5 + 15a^3$

Y COMO $7 \nmid a^2 - 1$, SE QUE $a \not\equiv 1 \pmod{7}$ Y $a \not\equiv 6 \pmod{7}$

QUIERO VER QUE EN LOS VALORES RESTANTES, LA EXPRESIÓN SEA CONGRUENTE A CERO MÓDULO 7. ✓

$$a^7 + 8a^5 + 15a^3 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Leftrightarrow a^7 + 1a^5 + 1a^3 \equiv 0 \pmod{7}$$

TDR

a	2	3	4	5	0
a ³	1	6	1	6	0
a ⁵	4	5	2	3	0
a ⁷	2	3	4	5	0

$\hookrightarrow 6 + 5 + 3 = 14 \equiv 0 \pmod{7} \checkmark$ $a \equiv 3 \pmod{7}$, 7 DIVIDE A M
 $\hookrightarrow 1 + 4 + 2 \equiv 0 \pmod{7} \checkmark$ $a \equiv 2 \pmod{7}$, 7 DIVIDE A M

*¹ $4 + 2 + 1 = 7 \equiv 0 \pmod{7}$, $a \equiv 4 \pmod{7}$ 7 DIVIDE A M ✓

*² $5 + 3 + 6 = 14 \equiv 0 \pmod{7}$, $a \equiv 5 \pmod{7}$, 7 DIVIDE A M ✓

Y $a \equiv 0 \pmod{7}$, 7 DIVIDE A M ✓

LUEGO, COMO $M = 3^4 \cdot (\dots)$ Y $7 \mid M$ PARA TODO a TAL QUE $7 \nmid a^2 - 1$ $3 \nmid a^2 - 1$, $3^4 \cdot 7 \mid a^3(a^2 + 3)(a^2 + 5)$

ESTOS a SON MÚLTIPLOS DE 3 Y NO PUEDEN SER CONGRUENTES A 1 NI A 6 MÓDULO 7.

EJ. $a = 3$ $3^3 (3^2 + 3)(3^2 + 5) = 4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \checkmark$

Y $a^2 - 1 = 8 = 2^3 + 3$
 $2^3 \nmid 7$ ✓

↓ Bien, PODRÍAS haber puesto la frase final: "Como $3^4 \mid \dots$ y

$7 \mid \dots$, y $3^4 \nmid 7$,

queda probado que $3^4 \cdot 7 \mid \dots$ "

④ SABRIENDO QUE $a, b \in \mathbb{Z}$ y $(a:b)=5$. CALCULAR LOS POSIBLES VALORES DE $(a^4 + b^4 : 2ab^2)$. EXHIBIR UN EJEMPLO EN CADA CASO.

SI $(a:b)=5$ PUEDO ESCRIBIR $a=5A$ Y $b=5B$

DONDE $(A:B)=1$ (COPRIMOS)

$$(a^4 + b^4 : 2ab^2) = ((5A)^4 + (5B)^4 : 2(5A)(5B)^2)$$

$$= (5^4(A^4 + B^4) : 5^3 \cdot 2AB^2) = d$$

$$5^3 (5A^4 + 5B^4 : 2AB^2) = d$$

→ LLAMO d' A ESE MCD

$$\begin{cases} d' \mid 5A^4 + 5B^4 \\ d' \mid 2AB^2 \end{cases} \Rightarrow d' \mid 2A(5A^4 + 5B^4) - 5B^2(2AB^2)$$

$$d' \mid 10A^5 + 10AB^4 - 10AB^4$$

$$d' \mid 10A^5$$

$$d' \mid 2B^2(5A^4 + 5B^4) - 5A^3(2AB^2)$$

$$d' \mid 10B^2A^4 + 10B^6 - 10A^4B^2$$

$$d' \mid 10B^6$$

$$d' \mid 10A^5$$

$$d' \mid 10B^6$$

$$\left. \begin{matrix} d' \mid 10A^5 \\ d' \mid 10B^6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow d' \mid (10A^5 : 10B^6) = 10 \cdot (A^5 : B^6) \text{ FACT. PRIMOS}$$

$$d' \mid 10$$

$$d' \in \{1, 2, 5, 10\}$$

NO HAY MÁS

YA QUE $10 = 2 \cdot 5$

$$(1+1)(1+1) = 4$$

VEO SI 2, 5 Y/O 10 DIVIDEN A AMBOS MIEMBROS DEL MCD

$$\text{MCD} = (5A^4 + 5B^4 : 2AB^2)$$

$$2 \mid d' ?$$

VEO MÓDULO 2

$$5A^4 + 5B^4 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\overset{||}{1} A^4 + \overset{||}{1} B^4 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$2 \cdot AB^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\overset{||}{0} \cdot AB^2 \equiv 0 \pmod{2} \checkmark$$

$$A^4 + B^4 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow A \equiv B \pmod{2} \text{ COMO } (A:B)=1, \text{ AMBOS DEBEN}$$

$$\text{SER IMPARES, ES DECIR, } A \equiv 1 \pmod{2} \checkmark$$

$$B \equiv 1 \pmod{2}$$

$$2 \mid d' \Leftrightarrow (A \equiv 1 \pmod{2} \wedge B \equiv 1 \pmod{2}) \checkmark$$

$$5 \mid d' ?$$

VEO MÓDULO 5

$$5A^4 + 5B^4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\overset{||}{0} A^4 + \overset{||}{0} B^4 \equiv 0 \pmod{5} \checkmark$$

$$2 \cdot AB^2 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Leftrightarrow A \equiv 0 \pmod{5} \text{ ó } B \equiv 0 \pmod{5}$$

EXCLUSIVO, $(A:B)=1$

$$\Rightarrow 5 \mid d' \text{ SI } A \equiv 0 \pmod{5} \text{ ó } B \equiv 0 \pmod{5} \checkmark$$

POR ÚLTIMO, $10 \mid d'$ SI OCURREN AMBAS SIMULTÁNEAMENTE $\checkmark$

VOLVIENDO A d , PUEDE SER

$$- 5^3 \cdot 1 \checkmark$$

$$- 5^3 \cdot 2 \checkmark$$

$$- 5^3 \cdot 5 \checkmark$$

$$- 5^3 \cdot 10 \checkmark$$

DEPENDE DE
 a y b

$$\text{TOMO } A=1 \quad B=2$$

$$a=5 \quad b=10$$

$$(5^4 + 10^4 : 2 \cdot 5 \cdot 10^2) = 5^3 ? \checkmark$$

$$\Leftrightarrow (10625 : 1000) = 125$$

$$125 (85 : 8) = 125 \cdot 1 = 125 \checkmark$$

$$8 = 2^3 \quad 85 = 5 \cdot 17 \Rightarrow (8 : 85) = 1$$

CONTINUO CON LOS EJEMPLOS DE (4)

$$\bullet d = 5^3 \cdot 2 \Leftrightarrow (A \equiv 1(2) \vee B \equiv 1(2)) \wedge (A \not\equiv 0(5) \wedge B \not\equiv 0(5))$$

$$\text{TOMO } A=1 \quad B=1$$

$$a=5 \quad b=5$$

$$(5^4 + 5^4 : 2 \cdot 5 \cdot 5^2) = (2 \cdot 5^3 \cdot 5 : 2 \cdot 5^3) = 2 \cdot 5^3 \left(\overset{5}{5} : 1 \right) \checkmark$$

$$\bullet d = 5^3 \cdot 5 = 5^4 \Leftrightarrow (A \equiv 0(2) \wedge B \equiv 1(2)) \vee (A \equiv 1(2) \wedge B \equiv 0(2))$$

$$A=2 \quad B=5$$

$$\wedge ((A \equiv 0(5) \wedge B \not\equiv 0(5)) \vee (A \not\equiv 0(5) \wedge B \equiv 0(5)))$$

$$a=10 \quad b=25$$

↪ A y B NO SON AMBOS CONG
A 1 MÓDULO 2 Y UNO DE ELLOS
ES CONG. A 0 MÓDULO 5

$$(10^4 + 25^4 : 2 \cdot 10 \cdot 25^2)$$

$$(400625 : 12500)$$

$$(5^4 \cdot 641 : 5^4 \cdot 20) = 5^4 \left(\overset{1}{641} : 20 \right) = 5^4 \checkmark$$

$$2 \nmid 641 \quad 5 \nmid 641$$

$$\bullet d = 5^3 \cdot 10 = 2 \cdot 5^4 \Leftrightarrow (A \equiv 1(2) \wedge B \equiv 1(2)) \wedge \overset{\text{EXCLUSIVO}}{\uparrow} (A \not\equiv B \equiv 0(5))$$

$$\text{TOMO } A=1 \quad B=5$$

$$a=5 \quad b=25$$

$$(5^4 + 25^4 : 2 \cdot 5 \cdot 25^2) = 2 \cdot 5^4 \checkmark$$

$$(391250 : 6250)$$

$$(2 \cdot 5^4 \cdot 313 : 2 \cdot 5^4 \cdot 5) = 2 \cdot 5^4 \left(\overset{1}{313} : 5 \right) = 2 \cdot 5^4 \checkmark$$

$$1 \nmid 313$$

EXCELENTE
PARCIAL.