

Tema 3

1	2	3	4
R	R	B	B

Mercedes 2 hojas

NOTA
7.5 (siete) P7

Recuperatorio del 1er. Parcial Álgebra I - martes 25 de noviembre

APELLIDO: Brian

TURNO: 1

NOMBRE: Federico

CARRERA: Cs. de Computación

1. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 16\} : f \text{ es una función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la relación dada por

$$f \mathcal{R} g \iff \text{Im}(f) \Delta \text{Im}(g) \neq \text{Im}(f) \cup \text{Im}(g).$$

- a) Determinar si la relación es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.
b) Sean $f, g \in \mathcal{F}$ definidas por $f(n) = 2n$ y $g(n) = 16 - n$. ¿Cuántas funciones $h \in \mathcal{F}$ satisfacen que $f \mathcal{R} h$ pero $g \not\mathcal{R} h$?

2. Sea $(a_n)_n$ la sucesión definida por recurrencia como
$$\begin{cases} a_1 = 3^2, \\ a_2 = 7 \cdot 3^3, \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + 5a_n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $3^{n+1} | a_n$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hallar los posibles valores de $(3n^4 + 2n^3 - n + 1 : 3n^2 - 1)$. Exhibir un ejemplo para cada valor hallado.

4. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que el resto de dividir a $a^4 - 10a^2 - 2a + 5$ por $a^2 + 1$ es congruente a $a^2 - 2a$.

Justifique todas sus respuestas.

$$3) \frac{(3n^4 + 2n^3 - n + 1) : (3n^2 - 1)}{d}$$

$$\begin{cases} d | 3n^4 + 2n^3 - n + 1 \\ d | 3n^2 - 1 \end{cases} \xrightarrow{\times n^2} \begin{cases} d | 3n^4 + 2n^3 - n + 1 \\ d | 3n^4 - n^2 \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} d | 2n^3 + n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d | 2n^3 + n^2 - n + 1 \\ d | 3n^2 - 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 3 \\ \times 2n \end{matrix}} \begin{cases} d | 6n^3 + 3n^2 - 3n + 3 \\ d | 6n^3 - 2n \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} d | 3n^2 - n + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d | 3n^2 - n + 3 \\ d | 3n^2 - 1 \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} d | -n + 4 \xrightarrow{\begin{matrix} \times 3n \\ \times 3n \end{matrix}} \begin{cases} d | -n + 4 \\ d | 3n^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | -n + 4 \\ d | 3n^2 - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \begin{cases} d | 12n - 1 \\ d | -n + 4 \end{cases} \xrightarrow{\times 12} \begin{cases} d | 12n - 1 \\ d | -12n + 48 \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} d | 47$$

47 primo, entonces $d = 1$ o $d = 47$. ✓

Exhibo ejemplos: ~~si $n=1$~~ :

$$a) n=1 \rightarrow (3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 + 1 : 3 \cdot 1^2 - 1) = (5 : 2) = 1$$

$$b) n=4 \rightarrow (3 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 - 4 + 1 : 3 \cdot 4^2 - 1) = (47 \cdot 19 : 47) = 19 \quad \blacksquare \quad \checkmark$$

$$4) \text{ Buscamos } a \in \mathbb{Z} \mid a^4 - 10a^2 - 2a + 5 \equiv a^2 - 2a (a^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 10a^2 - 2a + 2a + 5 \equiv 0 (a^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 10a^2 + 5 \equiv 0 (a^2 + 1) \Leftrightarrow a^2 + 1 \mid a^4 - 10a^2 + 5. \text{ Sabemos que } a^2 + 1 \mid a^2 + 1, \text{ entonces:}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 \mid a^4 - 10a^2 + 5 \\ a^2 + 1 \mid a^2 + 1 \end{cases} \xrightarrow{\times a^2} \begin{cases} a^2 + 1 \mid a^4 - 10a^2 + 5 \\ a^2 + 1 \mid a^4 + a^2 \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} a^2 + 1 \mid -12a^2 + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 \mid a^2 + 1 \\ a^2 + 1 \mid -12a^2 + 5 \end{cases} \xrightarrow{\times 12} \begin{cases} a^2 + 1 \mid 12a^2 + 12 \\ a^2 + 1 \mid -12a^2 + 5 \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} a^2 + 1 \mid 17. \quad \checkmark$$

Luego $a^2 + 1 \mid 17 \Rightarrow a = 4, a = 0, a = -4$ pues $4^2 + 1 = 17 \mid 17 \checkmark$
 $0^2 + 1 = 1 \mid 17 \checkmark$
 $(-4)^2 + 1 = 17 \mid 17 \checkmark$
 y no hay más valores porque 17 es primo.

$\Rightarrow$ Todos los $a \in \mathbb{Z}$ que cumplen son $a \in \{4, -4, 0\}$. $\blacksquare$