

1	2	3	4	Nota
B	B	B	B	10

APELLIDO Y NOMBRE: NATALIA PÉREZ
Natalia Pérez

N° DE LIBRETA: [REDACTED]

CARRERA: Licenciatura en Ciencias de la Computación

TURNOS: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☒ 14 a 16hs. ☐ 17 a 22hs. ☐

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Primer parcial - 17/05/2024

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{F} = \{h : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 50\} / h \text{ es inyectiva}\}$.
Definimos en $\mathcal{F}$ la relación $\mathcal{R}$ como

$$f \mathcal{R} g \text{ si y sólo si } \#(\text{Im}(f) \setminus \text{Im}(g)) = 0 \text{ o } 4.$$

- es una resta.

- Analizar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.
- Sea $f \in \mathcal{F}$ definida como $f(x) = x$ para $1 \leq x \leq 4$. Calcular cuántas funciones $g \in \mathcal{F}$ satisfacen $f \mathcal{R} g$.

Ejercicio 2. Probar que

$$\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-1} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 3. Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de dividir por 18 a

$$5 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!$$

Ejercicio 4. Caracterizar, para cada $a \in \mathbb{Z}$, el valor de $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

Ej 1) $F = \{h: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 50\} / h \text{ es inyectiva}\}$

Relación en F : $f R g \Leftrightarrow \#(Im(f) - Im(g)) = 0 \text{ o } 4$

a) **Reflexiva**: R es reflexiva si $\forall f \in F, f R f$

$Im(f) - Im(f) = \emptyset \Rightarrow \#(Im(f) - Im(f)) = 0 \Rightarrow f R f \Rightarrow$ Es reflexiva.

Simétrica: R es simétrica si $\forall f, g \in F, f R g \Rightarrow g R f$
 Observemos que las funciones de F tienen un Dominio de 4 elementos y son funciones inyectivas
 $\Rightarrow \#(Im(f)) = 4 \forall f \in F$.

~~Divido en casos:~~

1. Supongo que ~~$\#(Im(f) - Im(g)) = 0 \Rightarrow f R g$~~

~~Esto sucede si y sólo si $Im(f) = Im(g)$~~

~~$\Rightarrow \#(Im(g) - Im(f)) = 0 \Rightarrow g R f$~~

2. Supongo que $\#(Im(f) - Im(g)) = 4 \Rightarrow f R g$

Esto sucede si y sólo si $Im(f) \cap Im(g) = \emptyset$

$\Rightarrow \#(Im(g) - Im(f)) = 4 \Rightarrow g R f$

Como para cada caso $f R g \Rightarrow g R f$, R es simétrica

Antisimétrica: No es antisimétrica. Contraejemplo:

$f(x) = x, g(x) = 6x \Rightarrow Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}, Im(g) = \{6, 12, 18, 24\}$

$(Im(f) - Im(g)) = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \#(Im(f) - Im(g)) = 4 \Rightarrow f R g$

$(Im(g) - Im(f)) = \{6, 12, 18, 24\} \Rightarrow \#(Im(g) - Im(f)) = 4 \Rightarrow g R f$

Vemos que $f R g$ y $g R f$. Para que sea antisimétrica una Relación, debe cumplirse que $\forall f, g \in F, f R g, g R f \Rightarrow f = g$, pero en ~~este~~ el ejemplo $f \neq g \Rightarrow R$ no es antisimétrica.

Transitiva: R es transitiva si $\forall f, g, h \in F$

$f R g$ y $g R h \Rightarrow f R h$.

~~Supongo que $\#(Im(f) - Im(g)) = 0 \Rightarrow f R g$~~
~~Divido en casos:~~

~~1. $\#(Im(f) - Im(g)) = 0 \Rightarrow f R g$~~
 ~~$\#(Im(g) - Im(h)) = 0 \Rightarrow g R h$~~

~~Esto sucede $\Rightarrow Im(f) = Im(g)$ y $Im(g) = Im(h)$~~
 ~~$\Rightarrow$ por transitividad $Im(f) = Im(h) \Rightarrow \#(Im(f) - Im(h)) = 0$~~
 ~~$\Rightarrow f R h$~~

R No es transitiva. Contraejemplo:

$$\text{Im}(f) = \{1, 2, 3, 4\}, \text{Im}(g) = \{6, 7, 8, 9\}, \text{Im}(h) = \{1, 2, 10, 11\}$$

$$\#(\text{Im}(f) - \text{Im}(g)) = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \#(\text{Im}(f) - \text{Im}(g)) = 4 \Rightarrow f R g$$

$$\#(\text{Im}(g) - \text{Im}(h)) = \{6, 7, 8, 9\} \Rightarrow \#(\text{Im}(g) - \text{Im}(h)) = 4 \Rightarrow g R h$$

$$\#(\text{Im}(f) - \text{Im}(h)) = \{3, 4\} \Rightarrow \#(\text{Im}(f) - \text{Im}(h)) = 2 \Rightarrow f \not R h$$

$f R g, g R h$, pero $f \not R h \Rightarrow$ No es transitiva.

Rta: R es reflexiva, simétrica.

b) $f \in F, f(x) = x$. ¿cuántas funciones $g \in F$ satisfacen $f R g$.
 Recuerdo que $\#(\text{Im}(f)) = 4 \forall f \in F$ y f es $\uparrow$ inyectiva.
 $f R g \Leftrightarrow \#(\text{Im}(f) - \text{Im}(g)) = 0 \text{ o } 4$.

Es 0 $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(g)$
 Es 4 $\Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \emptyset$ } entonces busco todos los g que cumplan esto.

$\text{Im}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

1) $\text{Im}(g)$ debe tener los mismos elementos para que $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$, pero no necesariamente deben estar en el mismo orden.

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \end{matrix} = 4! \text{ opciones.}$$

2) $\text{Im}(g)$ no puede tener ningún elemento de $\text{Im}(f)$, entonces puede tener cualquiera de los 50 posibles menos esos 4.

$$\begin{matrix} 46 & 45 & 44 & 43 \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \end{matrix} = 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \text{ opciones.}$$

$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 50\}$
 $\forall f \in F$.

Entonces, como 1) y 2) son casos disjuntos, tengo:

$$4! + 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = 3916464 \text{ opciones.}$$

~~La cantidad de funciones $g \in F$ que satisfacen $f R g$~~

Rta: La cantidad de funciones $g \in F$ que satisfacen $f R g$ es 3916464 funciones.

PROVA A L-Z

2) Probar que $\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-1} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Defino $P(n) = \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-1} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = V$

Lo pruebo por inducción:

• **Caso base:** ¿ $P(1) = V$?

$$\prod_{i=1}^1 \frac{1+i}{2i-1} = \frac{1+1}{2(1)-1} = 2 = 2^1 \Rightarrow P(1) = V$$

Pruebo $P(2)$ por si lo llevo a necesitar.

¿ $P(2) = V$? $\prod_{i=1}^2 \frac{2+i}{2i-1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 = 2^2 \Rightarrow P(2) = V$

• **Paso inductivo:** Sea $h \in \mathbb{N}$, $\prod_{i=1}^h \frac{h+i}{2i-1} = 2^h$

H.I: $P(h) = V$, es decir, quiero probar que $P(h+1)$ es verdadero, es decir, que

$$\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-1} = 2^{h+1}$$

$$\prod_{i=1}^{h+1} \frac{h+1+i}{2i-1} = \left(\prod_{i=1}^h \frac{h+1+i}{2i-1} \right) \left(\frac{h+1+h+1}{2(h+1)-1} \right)$$

AUX: $\prod_{i=1}^h \frac{h+1+i}{2i-1} = \frac{\prod_{i=1}^h (h+1+i)}{\prod_{i=1}^h (2i-1)}$

Toma valores
 $\frac{(h+1+1)(h+1+2)(h+1+3)\dots(h+1+h)}{h+2 \quad h+3 \quad h+4 \quad \dots \quad h+(h+1)}$

$$\Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^h (h+1+i)}{\prod_{i=1}^h (2i-1)} = \frac{\prod_{i=2}^{h+1} h+i}{\prod_{i=1}^h (2i-1)} = \frac{\left(\prod_{i=1}^h (h+i) \right) (h+h+1)}{\left(\prod_{i=1}^h (2i-1) \right) (h+1)} = \frac{\left(\prod_{i=1}^h \frac{h+i}{2i-1} \right) (2h+1)}{(h+1)}$$

Retomando ejercicio...

Por H.I

$$\left(\prod_{i=1}^h \frac{h+i}{2i-1} \right) \frac{(2h+1)(2h+2)}{(h+1)(2(h+1)-1)} \stackrel{\text{Por H.I}}{=} \frac{2^h (2h+1) 2(h+1)}{(h+1)(2h+1)} = 2^h \cdot 2 = 2^{h+1}$$

∴ $P(h+1)$ es verdadero.

Entonces, tengo $P(1) = V$ y $(P(h) \Rightarrow P(h+1))$, por lo tanto por el principio de inducción, queda probado que $P(n) = V \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3) Calcular, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de dividir por 18 a $5 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!$

Veo los términos por separado:

~~1. $5 \cdot 35^n$~~

$$1. 5 \cdot 35^n: 35 \equiv 17 (18) \equiv -1 (18) \Rightarrow 35^n \equiv (-1)^n (18)$$

$$5 \cdot 35^n \equiv 5(-1)^n (18)$$

$$\hookrightarrow 1^* \text{ si } n \equiv 0 (2)$$

$$(-1) \text{ si } n \not\equiv 0 (2)$$

$$2. 73^{3021} = \text{~~73^{3021}}~~ \quad 73 \equiv 1 (18) \Rightarrow 73^{3021} \equiv 1^{3021} \equiv 1 (18)$$

$$3. \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k!$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

~~A~~ A partir de $9!$

tengo $2 \cdot 3^2$ en mi multiplicación

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

$$\underline{3^2} \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \underline{2} \Rightarrow \text{será divisible por 18}$$

$\Rightarrow$ Como estoy multiplicando algo congruente con 0 ~~mod 18~~ modulo 18, no me importa el 3^k porque al multiplicarlo por 0, me sigue quedando 0. $\Rightarrow$ No me importa la congruencia de 3^k a partir de ~~$k=9$~~ $k=9$

Veo lo que me da para $n < 9$

$$\sum_{k=1}^1 3^k \cdot k! = 3$$

$$\sum_{k=1}^2 3^k \cdot k! = 3 + 18 \equiv 3 (18)$$

$$\sum_{k=1}^3 3^k \cdot k! = 3 + 18 + 162 \equiv 3 (18)$$

$$\sum_{k=1}^4 3^k \cdot k! = 3 + 18 + 162 + 1944 \equiv 3 (18)$$

$$\sum_{k=1}^5 3^k \cdot k! = 3 + 18 + 162 + 1944 + 29160 \equiv 3 (18)$$

$$\sum_{k=1}^6 3^k \cdot k! = 3 + 18 + 162 + 1944 + 29160 + 524880 \equiv 3 (18)$$

$$\sum_{k=1}^7 3^k \cdot k! = 3 + 18 + 162 + 1944 + 29160 + 524880 + 11022480 \equiv 3 (18)$$

$$\sum_{k=1}^8 3^k \cdot k! = 3 + 18 + 162 + 1944 + 29160 + 524880 + 11022480 + 264539520 \equiv 3 (18)$$

~~Lo que vemos es que todo número primo menor que 18 es divisible por 18, esto es porque a partir de~~

Como vemos, el primer término de la sumatoria **UBA EXACTAS** es el único no divisible por 18, entonces ~~para~~ tengo:

$$\sum_{k=1}^n 3^k \cdot k! \equiv 3 \pmod{18}$$

Ahora junto mis términos y tengo que

$$5 \cdot 35^n + 73^{3021} + \sum_{k=1}^n 3^k \cdot k! \equiv 5(-1)^n + 1 + 3 \pmod{18}$$

Rta: Para todos los $n \equiv 0 \pmod{2}$, resto = 9 ✓
 Para todos los $n \not\equiv 0 \pmod{2}$, resto = 17 ✓
 Ya que $5(-1)^n + 1 + 3 = -1 \equiv 17 \pmod{18}$ ✓

Veamos un ejemplo para cada caso:

$$n=2 \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{2}$$

~~$$5 \cdot 35^2 + 73^{3021} + \sum_{k=1}^2 3^k \cdot k! \equiv 9 \pmod{18}$$~~

$0 \leq 9 < 18 \Rightarrow 9$ es el resto de la división por 18.

$$n=1 \Rightarrow 5 \cdot 35 + 73^{3021} + \sum_{k=1}^1 3^k \cdot k! \equiv 17 \pmod{18}$$

$$n \not\equiv 0 \pmod{2}$$

$0 \leq 17 < 18 \Rightarrow 17$ es el resto de la división por 18.

ej 4) $a \in \mathbb{Z}$, $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1)$

Primero voy a usar teorema de Euclides para simplificar.

$$\begin{array}{r} a^3 + 31 \mid a^2 - a + 1 \\ -a^3 + a^2 - a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - a + 31 \\ -a^2 + a - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$30$$

$$\Rightarrow (a^3 + 31 : a^2 - a + 1) = (a^2 - a + 1 : 30) = d$$

$$d \mid 30 \text{ y } d \mid a^2 - a + 1$$

$$d \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$ Pruebo congruencia de $a^2 - a + 1$ con la tabla de restos.

Para la tabla, uso propiedades de congruencia.

a	$a^2 - a + 1$	(mod 2)
0	$0 - 0 + 1$	$\equiv 1$
1	$1^2 - 1 + 1$	$\equiv 1$

$$2 \nmid a^2 - a + 1$$

Entonces sus mltiplos tampoco dividen.

a	$a^2 - a + 1$	(mod 3)
0	$0 - 0 + 1$	$\equiv 1$
1	$1^2 - 1 + 1$	$\equiv 1$
2	$2^2 - 2 + 1$	$\equiv 0$

$$3 \mid a^2 - a + 1 \Leftrightarrow a \equiv 2 (3)$$

a	$a^2 - a + 1$	(mod 5)
0	$0 - 0 + 1$	$\equiv 1$
1	$1^2 - 1 + 1$	$\equiv 1$
2	$2^2 - 2 + 1$	$\equiv 3$
3	$3^2 - 3 + 1$	$\equiv 7 \equiv 2$
4	$4^2 - 4 + 1$	$\equiv 3$

$$5 \nmid a^2 - a + 1$$

Entonces sus mltiplos tampoco dividen.

$$d \in \{1, 3\}$$

Rta: entonces, ~~la~~ ~~valor~~ el valor de $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1) = d$:

$$d = 3 \Leftrightarrow a \equiv 2 (3)$$

$$d = 1 \Leftrightarrow a \not\equiv 2 (3) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

Es decir, para todos los $a \equiv 2 (3)$, $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1) = 3$
y para todos los $a \not\equiv 2 (3)$, $(a^3 + 31 : a^2 - a + 1) = 1$

Veamos un ejemplo para cada caso:

$$a = 8 \Rightarrow a \equiv 2 (3)$$

$$(543 : 57) = 9$$

$$a = 6 \Rightarrow a \not\equiv 2 (3)$$

$$(247 : 31) = 7$$