

Tema 1

1	2	3	4
B	R-	B-	B

NOTA
7,5

Segundo Parcial Álgebra I - martes 18 de noviembre

APELLIDO: Brain

NOMBRE: Federico

LIBRETA:

CARRERA: Cs de Computación

- Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $20a - 37b = 3$, $3a \equiv 1(5)$. Para los b hallados, dar el último dígito.
- Calcular el resto de dividir por $5^2 \cdot 17$ al número $\sum_{k=1}^{100} 5^{k!}$.
- (a) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ impares para los cuales

$$(-1)^{n+8} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$
 (b) Sea $w \in G_{17}$. Calcular la parte real de $(w^{45} + 3)(\bar{w}^{28} - 3)$.
- Factorizar el polinomio $f = X^5 + X^4 - 6X^3 + 4X^2 + 8X - 12$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que tiene una raíz r cuyo cuadrado r^2 es raíz múltiple del polinomio $g = 3X^3 - 11X^2 + 8X + 4$.

Justifique todas sus respuestas.

$$1) 200 - 37b = 3, 30 \equiv 11(5).$$

$$3a \equiv 1(5) \Leftrightarrow a \equiv 2(5) \Leftrightarrow 5k+2, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 5k+2, k \in \mathbb{Z}.$$

$$200 - 37b = 3 \Leftrightarrow 200 - 20(5k+2) - 37b = 3 \Leftrightarrow 100k - 37b = -37.$$

$(100:37) \mid 37$ Por lo que se nos garantiza que exista solución.

Busco solución particular:

$$(100:37)=1, \text{ entonces } \exists s, t \in \mathbb{Z} / 100s + 37t = 1.$$

$$100k - 37b = 1 \rightarrow \text{ejemplo, si } k=10, b=27 \text{ existe solución porque } 100 \cdot 10 - 37 \cdot 27 = 1000 - 999 = 1. \leftarrow \text{multiplico por } -37:$$

$$100 \cdot 10 \cdot (-37) - 37 \cdot 27 \cdot (-37) = -37 \Rightarrow 100 \cdot (-370) - 37 \cdot (-999) = -37.$$

$$\Rightarrow \text{si } k = -370, b = -999 \text{ es una solución particular.}$$

Busco solución homogénea:

$$100k - 37b = 0 \Leftrightarrow k = 37g, b = 100g, \text{ con } g \in \mathbb{Z}.$$

Luego el conjunto de las soluciones $(k, b) \in \mathbb{Z}$ es:

$$S = \{(k, b) \in \mathbb{Z} / k = 37g - 370, b = 100g - 999, g \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{Y si volvemos a "a", entonces } a = 5(37g - 370) + 2 \Leftrightarrow a = 185g - 1848, g \in \mathbb{Z}$$

y el conjunto de soluciones que buscabamos de pares (a, b) , es:

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} / a = 185g - 1848, b = 100g - 999, g \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Luego, el último dígito de } b = \begin{cases} 1 & \text{si } g \geq 10 \\ 9 & \text{si } g < 10 \end{cases}, g \in \mathbb{Z}$$

Rta

$$4) f = x^5 + x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 12, g = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 9$$

Como sé que una raíz múltiple de g está en f , hallo las raíces de g y determino su multiplicidad.

→ No exactamente

$g \in \mathbb{Z}[x]$, por lo que podemos aplicar Lema de Gauss:

$$\text{Div}(20) = \{\pm 4, \pm 2, \pm 1\}$$

$$\rightarrow \text{Posibles raíces: } \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{5}{8}$$

$$\text{Div}(20) = \{2, 2, 1\}$$

Papel de fibra de caña de azúcar.

$$p(2) = 3 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \mid p$$

Veamos si 2 es la raíz múltiple evaluando en p' .

$$p' = 9x^2 - 22x + 8; p'(2) = 9 \cdot 2^2 - 22 \cdot 2 + 8 = 0 \text{ y entonces } (x-2)^2 \mid p$$

entonces ~~si la raíz múltiple de p es 2~~

Entonces, si la raíz de f es el adobado de la raíz múltiple de p , la raíz de f es $\sqrt{2}$ y $(x-\sqrt{2}) \mid f$.

Luego como $f \in \mathbb{Q}[x] \Leftrightarrow (x+\sqrt{2}) \mid f \Leftrightarrow (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \mid f$.

$$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = x^2 - (\sqrt{2})^2 = x^2 - 2$$

$$\Rightarrow f = (x^2 - 2) \cdot g$$

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 8x - 12 \quad | x^2 - 2 \\ -(x^5 - 2x^3) \\ \hline x^4 - 4x^3 \\ -(x^4 - 2x^2) \\ \hline -4x^3 + 6x^2 \\ -(-4x^3 + 8x) \\ \hline 6x^2 - 12 \\ -(6x^2 - 12) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{y entonces } f = (x^2 - 2)(x^3 + x^2 - 4x + 6)$$

Busco raíces de $(x^3 + x^2 - 4x + 6)$: (lo llamo h).

Como $f \in \mathbb{Z}$ Como $\in \mathbb{Z}[x]$, vale el lema de Gauss: $\text{Div}(h) = \{\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$, $\text{Div}(h) = \{\pm 1\}$.

$$h(-3) = -3^3 + 3^2 - 4(-3) + 6 = 0 \text{ y } (x+3) \mid h$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 4x + 6 \quad | x^2 + 3x + 2 \\ -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -2x^2 - 4x \\ -(-2x^2 - 6x) \\ \hline 2x + 6 \\ -(2x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Entonces volviendo a f , tengo que:

$$f = (x^2 - 2)(x+3)(x^2 - 2x + 2)$$

Busco raíces de $x^2 - 2x + 2$ con la resolvente:

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} \rightarrow w^2 = -4 \Rightarrow w = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i, \Rightarrow (x - (1+i)) \mid f \wedge (x - (1-i)) \mid f$$

(sigue en la otra hoja)

Finalmente llegamos a que:

Factorización de f en $\mathbb{C}[x]$: $(x-2)(x+2)(x+3)(x-(1+i))(x-(1-i))$

Producto de polinomios irreducibles de grado 1

Factorización de f en $\mathbb{Q}[x]$: $(x^2-2)(x+3)(x^2-2x+2)$

irreducible de grado 2 sin raíces en $\mathbb{Q}$, irreducible de grado 1 sin raíces en $\mathbb{Q}$, irreducible de grado 2 sin raíces en $\mathbb{Q}$.

Factorización de f en $\mathbb{R}[x]$: $(x-2)(x+2)(x+3)(x^2-2x+2)$

irreducibles de grado 1, irreducible de grado 2 sin raíces en $\mathbb{R}$.

3)

$$3.2 - \frac{(-1)^{n+8}}{z_1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n \rightarrow \text{Sabemos que } z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \end{cases}$$

~~Por lo tanto~~ a) z_1 : $|z_1| = \sqrt{(-1)^2} = 1$.

$\arg(z_1) = \pi$ (puesto $\in \mathbb{R}_{<0}$); y por De Moivre, $z_1^{n+8} = \arg(z_1)(n+8)$

b) z_2 : $|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ $\rightarrow \arg(z_1^{n+8}) = \pi(n+8)$

$\arg(z_2) = \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Im}(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ Re}(\theta) \end{array}$ $\times \arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$

Luego $z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow \arg(z_2^n) = \frac{\pi}{3}n$

Entonces llegamos a que $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \end{cases}$

(a) $\pi(n+8) = \frac{\pi}{3}n + 2k\pi \Leftrightarrow n+8 = \frac{n}{3} + 2k \Leftrightarrow 3n+24 = n+6k \Leftrightarrow$

$2n = -24 + 6k \Leftrightarrow 2n = -24(6) \Leftrightarrow n = -12(3) \Leftrightarrow$

$n \geq 0(3) \rightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$, y entonces todos los n impares tales que $z_1 = z_2$

son $n = 3k, \forall k \in \mathbb{Z} / k \text{ impar}$. $\rightarrow$ Con $k \in \mathbb{N}$, para que $n \in \mathbb{N}$



Papel de fibra de caña de azúcar.

3.6- $W \in G_{17} \cdot (W^{45} + 3)(W^{-28} - 3)$

$$\begin{aligned} (W^{45} + 3)(W^{-28} - 3) &= (W^{45} + 3)(W^{-28} - 3) = (W^{r_{17}(45)} + 3)(W^{r_{17}(-28)} - 3) = \\ &= (W^{11} + 3)(W^6 - 3) = \underbrace{W^{17}}_{=1} - 3W^{11} + 3W^6 - 9 = -3W^{11} + 3W^6 - 8. \end{aligned}$$

✓ ¡Pues $W \in G_{17}$ ✓

Para calcular la parte real de z tengo en cuenta que $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ✓

↪ $z = -3W^{11} + 3W^6 - 8$ ✓

$\bar{z} = -3\bar{W}^{11} + 3\bar{W}^6 - 8 = -3W^{-11} + 3W^{-6} - 8 = -3W^6 + 3W^{11} - 8$ ✓

Entonces $\frac{-3W^{11} + 3W^6 - 8 + (-3W^6 + 3W^{11} - 8)}{2} =$

$= \frac{-3W^{11} + 3W^{11} + 3W^6 - 3W^6 - 8 - 8}{2} = \frac{-16}{2} = -8$ ✓

↪ entonces $\text{Re}(z) = -8$ ✓ ✓ y si $W=1 \rightarrow (1+3)(1-3) = -8 = \text{Re}(z)$.

↪ No es necesario ver a $W=1$ aparte.
 ... en comenos entre sí, analizo los potes por