

Álgebra I - Curso de verano 2025

Primer recuperatorio del Segundo parcial - 21/03/2025

1. Determine todos los primos positivos p tales que

$$p \mid 36^{p^3-p^2} + 30^{p^2} + 64.$$

2. Encuentre todos los divisores de 3^{200} que tengan resto 82 en la división por 119.

3. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{33}}$. Encuentre todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\bar{\omega}^6 \in G_{2n+1}$ y

$$\sum_{j=0}^{n+4} w^{11j} = 0.$$

4. Factorice en irreducibles de $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, y $\mathbb{C}[X]$ el polinomio

$$f = x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 40x + 32,$$

sabiendo que tiene alguna raíz en común con $g = x^4 - x^3 - 9x^2 - 16x - 10$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas y escriba con claridad.

1) DETERMINE TODOS LOS PRIMOS POSITIVOS P TALES QUE

$$P \mid 36^{p^3-p^2} + 30^{p^2} + 64$$

DESCRIBO LA CONGRUENCIA

$$36^{p^3-p^2} + 30^{p^2} + 64 \equiv 0 \pmod{P}$$

$$36^{P(P-1)} + (30)^P + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

DIVIDO EN 2 CASOS: $P \mid 36$ Y $P \nmid 36$

CASO $P \mid 36 \rightarrow P=3$ O $P=2 \rightarrow P \mid 30$

$$(3^{p^3-p^2} \cdot 2^{p^2}) + (5 \cdot 3 \cdot 2)^{p^2} + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

$$0 + 0 + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

$2^6 \equiv 0 \pmod{P}$ ESTO NOS DICE QUE $P \neq 3$

YA QUE $2^6 \not\equiv 0 \pmod{3}$ POR LO QUE $P=2$ FUNCIONA SOLAMENTE

CASO $P \nmid 36$: *ACA PUEDO USAR PTF PORQUE P PRIMO Y $P \nmid 36$

$$* (36^{P(P-1)} + (30)^P + 2^6 \equiv 0 \pmod{P})$$

$$36^{P-1} + (30)^P + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

$$(36^{P-1}) + (30)^P + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

$$36^{P-1} + (30)^P + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

$$1 + (5 \cdot 2 \cdot 3)^{p^2} + 2^6 \equiv 0 \pmod{P}$$

AHORA TENEMOS DOS CASOS DESDE ACA, DONDE $P=5$ Y $5 \mid 30$

(NO PUEDE SER 2, 3 PORQUE SI NO $P \mid 36$ NI OTRO PRIMO PORQUE $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$)

Y EL CASO DONDE $P \nmid 30$ (COMO $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ NO ES NINGUNO DE LOS 3)

$$\begin{aligned} 36 &= 3^2 \cdot 2^2 \\ 30 &= 3 \cdot 2 \cdot 5 \end{aligned}$$

PTF NOS DICE

$$a^P \equiv a \pmod{P}$$

$$a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$$

CON P PRIMO
Y $P \nmid a$

Caso $p=5$: caso 130:

$$1 + (30)^{5^2} + 2^6 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$1 + 0 + 4 \equiv 0 \pmod{5}$$

$5 \equiv 0 \pmod{5} \leftarrow 5$ FUNCIONA TAMBIEN

Caso $p \nmid 30$: ACA PUEDO USAR PTF PORQUE p PRIMO Y $p \nmid 30$

$$1 + (30^p)^p + 2^6 \equiv 0 \pmod{p}$$

$p \notin \{5, 2, 3\}$

$$1 + 30^p + 2^6 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$1 + 30 + 2^6 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$31 + 2^6 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$95 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$5 \cdot 19 \equiv 0 \pmod{p} \leftarrow p=19 \text{ EN ESTE CASO}$$

CONCLUYO QUE TODOS LOS PRIMOS QUE DIVIDEN A $36^{p^3-p^2+p^2} + 30 + 64$

SON 2, 5 Y 19

2) ENCUENTRE TODOS LOS DIVISORES DE 3^{200} QUE TENGAN RESID. 82 EN LA DIVISIÓN POR 119

OBSERVO QUE LOS DIVISORES DE 3^{200} DEBEN SER DE LA FORMA 3^n CON $0 \leq n \leq 200$, LOS DIVISORES NO PUEDEN TENER OTROS PRIMOS EN SU FACTORIZACIÓN ADemás DEL 3

ENTONCES NECESITO: $3^n \equiv 82 \pmod{119}$

$119 = 7 \cdot 17$

$$\begin{cases} 3^n \equiv 82 \pmod{17} \\ 3^n \equiv 82 \pmod{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^n \equiv 14 \pmod{17} \\ 3^n \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

$3^n \equiv 14 \pmod{17}$ TENGO QUE 17 PRIMO Y $17 \nmid 3$, USO PTF

$$\left(\frac{16}{3}\right)^{k_1} 3^{r_{16}(n)} \equiv 14 \pmod{17}$$

REESCRIBO $n = 16k_1 + r_{16}(n)$

$r_{16}(n) = r_1$

$$3^{r_{16}(n)} \equiv 14 \pmod{17}$$

HAGO UNA TABLA PARA SABER CUAL ES EL RESTO DE n QUE FUNCIONA:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	(MOD 16)
3^n	3	9	10	13	5	15	11	16	14	X	X	X	X	X	X	X	(MOD 17)

MÁS QUE DONDE NO FUNCIONA, EL RESTO NO ES 14

OBTENGO QUE $n \equiv 9 \pmod{16}$

AHORA VEO LA OTRA ECUACIÓN:

$3^n \equiv 5 \pmod{7}$

PUEDO USAR PTF PORQUE 7 PRIMO Y $7 \nmid 3$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^{k_2} 3^{r_6(n)} \equiv 5 \pmod{7}$$

ESCRIBO $n = 6k_2 + r_2$

$$3^{r_2(n)} \equiv 5 \pmod{7}$$

$r_2 = r_6(n)$

HAGO UNA TABLA PARA VER CUANDO n FUNCIONA:

n	1	2	3	4	5	6	(MOD 6)
3^n	3	2	6	4	5	X	(MOD 7)

$n \equiv 5 \pmod{6}$

CASO ANDE $3 \nmid 5 \pmod{7}$

AHORA ME ARMO OTRO SISTEMA:

$$\begin{cases} n \equiv 9 (16) \\ n \equiv 5 (6) \end{cases}$$

NO SON COPRIMOS, LOS DIVISORES, COM PARTEN A 2
ME FIJO QUE SEA COMPATIBLE:

$$9 \equiv 1 (2) \wedge 5 \equiv 1 (2)$$

ES COMPATIBLE, COPRIMOS:

$$\begin{cases} n \equiv 9 (16) \\ n \equiv 2 (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \equiv 1 (8) \\ n = 8k + 1 \end{cases}$$

REEMPLAZO $\Rightarrow$

$$8k + 1 \equiv 2 (3)$$

$$8k \equiv 1 (3)$$

$$2 \cdot 8k \equiv 1 \cdot 2 (3)$$

$$k \equiv 2 (3)$$

JUNTO: $n = 8(3j + 2) + 1$

$$24j + 16 + 1$$

$$24j + 17$$

$$n \equiv 17 (24)$$

NO LEER

OBTENGO ENTONCES QUE $\frac{n}{3} \equiv \frac{24j + 17}{3} \equiv 8j (119)$

TENGO QUE TENER EN CUENTA QUE $0 \leq j \leq 7$ LOS DIVISORES
VAN A SER $\pm 3^n$

$$\begin{cases} n \equiv 9 (16) \\ n \equiv 2 (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \equiv 9 (16) \\ n = 16k + 9 \end{cases}$$

$$16k + 9 \equiv 2 (3)$$

$$16k \equiv 2 (3)$$

$$1 \cdot k \equiv 2 (3)$$

JUNTO: $n = 16(3k_2 + 2) + 9$

$$n = 48k_2 + 32 + 9$$

$$n = 48k_2 + 41$$

$$n \equiv 41 (48)$$

OBTENGO: $\frac{n}{3} \equiv \frac{48k_2 + 41}{3} \equiv 8k_2 (119)$
QUE

LOS DIVISORES VAN A SER DE LA FORMA $\pm 3^n$ CON $n = 48k_2 + 41$

$0 \leq k_2 \leq 3$ YA QUE n TIENE QUE SER ≤ 200