

1	2	3	4
B	B	B	B

NOTA
10

Segundo Parcial Álgebra I - viernes 4 de julio

Promociona con 10
(diez)

APELLIDO: Garaglia

TURNO PRÁCTICO: 5 Noche

NOMBRE: Tomás Gabriel

1. Resolver el siguiente sistema de congruencia $\begin{cases} x \equiv 5(10) \\ x \equiv 3(8) \\ x \equiv 5(25) \end{cases}$.

2. Hallar todos los primos $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$6p \mid 2 \cdot 17^{p+1} + 2 \cdot 45^{p^2+p-1} - 374 + 12p.$$

3. (a) Sea $\omega \in G_9, \omega \neq 1$. Probar que $(\omega^{23} - \omega^4 + \omega^{19} - \bar{\omega} - \omega^{-21} + \omega^{12})^3$ es imaginario puro.

- (b) Hallar todos los $\omega \in G_{40}$ que verifican $1 + \omega^2 = -\omega^8(1 + \omega^2)$.

4. Sea $p(x) = 5x^5 + 4x^4 - 21x^3 - 21x^2 - 20x + 5$. Factorizar $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ sabiendo que el máximo común divisor verifica

$$(p(x) : (x^6 - 1)(x - 5)) = x^2 + x + 1.$$

Justifique todas sus respuestas.

amós Gabriel Gaviglio

1) Resolver:

$$\begin{cases} X \equiv 5 (10) \\ X \equiv 3 (8) \\ X \equiv 5 (25) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \equiv 5 (5) \\ X \equiv 5 (2) \equiv 3 (2) \\ X \equiv 3 (8) \\ X \equiv 5 (25) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \equiv 5 (5) \\ X \equiv 5 (25) \\ X \equiv 3 (2) \rightarrow \text{no aporta información} \\ X \equiv 3 (8) \end{cases}$$

son restringidos por ediciones con sus potencias como módulo

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \equiv 5 (25) \Rightarrow X = 25 \cdot k + 5 & k \in \mathbb{Z} \\ X \equiv 3 (8) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 25k + 5 \equiv 3 (8)$$

$$\Leftrightarrow k + 5 \equiv 3 (8)$$

$$k \equiv -2 (8)$$

$$k \equiv 6 (8)$$

$$\begin{cases} k = 8q + 6 & q \in \mathbb{Z} \\ X = 25 \cdot k + 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = 25(8q + 6) + 5 = 200q + 150 + 5 = 200q + 155$$

$$\therefore X = 200q + 155 \text{ con } q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ó, dicho de otra forma, } X \equiv 155 (200)$$

2) Hallar todos los primos $p \in \mathbb{N}$ tales que:

$$6p \mid \underbrace{2 \cdot 17^{p+1} + 2 \cdot 45^{p^2+p-1} - 374 + 12p}_f$$

Si $6 \perp p$: $6p \mid f \Leftrightarrow 6 \mid f \wedge p \mid f$

Ahora bien, tengo que abarcar también los casos en que $6 \nmid p$.
Es decir, los casos ~~$p=2$~~ $p=2$ y $p=3$

Caso $p=2$ $6p \mid f \Leftrightarrow 12 \mid f \Leftrightarrow f \equiv 0 \pmod{12} \Leftrightarrow \begin{cases} f \equiv 0 \pmod{3} \\ f \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$

~~Primero, $12 \mid f$~~

~~Primero, $12 \mid f$~~

Primero, ~~$12 \mid f$~~

$$2 \cdot 17^{p+1} + 2 \cdot 45^{p^2+p-1} - 374 + 12p \stackrel{p=2}{=} 2 \cdot 17^3 + 2 \cdot 45^{4+2-1} - 374 + 24$$

$f \equiv 0 \pmod{3}$?

$$2 \cdot 17^3 + 2 \cdot 45^5 - 374 + 24 \stackrel{(3)}{=} 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 0^5 - 14 + 0 \stackrel{(3)}{=} 2 \cdot 8 - 2$$

$$2 \cdot 8 - 2 \stackrel{(3)}{=} 16 - 2 \stackrel{(3)}{=} 14 \stackrel{(3)}{=} 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

$f \not\equiv 0 \pmod{3}$ y por tanto $6 \nmid f$. $p=2$ no es solución.

Caso $p=3$: $6p \mid f \Leftrightarrow 18 \mid f \Leftrightarrow f \equiv 0 \pmod{18} \Leftrightarrow \begin{cases} f \equiv 0 \pmod{9} \\ f \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$

$$f = 2 \cdot 17^{p+1} + 2 \cdot 45^{p^2+p-1} - 374 + 12p \stackrel{p=3}{=} 2 \cdot 17^4 + 2 \cdot 45^{11} - 374 + 36$$

$f \equiv 0 \pmod{9}$?

$$2 \cdot 17^4 + 2 \cdot 45^{11} - 374 + 36 \stackrel{(9)}{=} 2 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot 0^{11} - 14 + 0 \stackrel{(9)}{=} 2 \cdot 1 + 4 \stackrel{(9)}{=} 6 \not\equiv 0$$

$f \not\equiv 0 \pmod{9}$ y por tanto, $18 \nmid f$, $6p \nmid f$

$p=3$ no es solución.

omás Gabriel Gargallo

Caso $P \neq 2 \wedge P \neq 3$:

$$6P \mid f \iff \begin{cases} 6 \mid f \\ P \mid f \end{cases} \iff \begin{cases} f \equiv 0 \pmod{6} \\ f \equiv 0 \pmod{P} \end{cases} \iff \begin{cases} f \equiv 0 \pmod{2} \\ f \equiv 0 \pmod{3} \\ f \equiv 0 \pmod{P} \end{cases}$$

$\therefore f \equiv 0 \pmod{2}?$

$$2 \cdot 17^{P+1} + 2 \cdot 45^{P^2+P-1} - 374 + 12P \stackrel{(2)}{\equiv} 0 \cdot 17^{P+1} + 0 \cdot 45^{P^2+P-1} - 0 + 0P \equiv 0 \pmod{2}$$

f es congruente a 0 módulo 2. ✓

$\therefore f \equiv 0 \pmod{3}?$

$$2 \cdot 17^{P+1} + 2 \cdot 45^{P^2+P-1} - 374 + 12P \stackrel{(3)}{\equiv} 2(-1)^{P+1} + 2 \cdot 0^{P^2+P-1} - 14 + 0P$$

$$2(-1)^{P+1} - 14 \stackrel{(3)}{\equiv} 2(-1)^{P+1} + 1 \stackrel{(3)}{\equiv} 2 \cdot 1 + 1 \stackrel{(3)}{\equiv} 3 \stackrel{(3)}{\equiv} 0 \checkmark$$

$\downarrow$ P es primo distinto a 2 y todos los primos salvo 2 son impares.

Por tanto $P+1$ es par y $(-1)^{P+1} = 1$

f es congruente a 0 módulo 3. ✓

$\therefore f \equiv 0 \pmod{P}?$

$$2 \cdot 17^{P+1} + 2 \cdot 45^{P^2+P-1} - 374 - 12P \stackrel{(P)}{\equiv} 2 \cdot 17^{P+1} + 2 \cdot 45^{P^2+P-1} - 374$$

Aux:

45	3
15	3
5	5
1	✓

Como 17 es primo y $P \neq 17$,
Puedo usar PTF si $P \neq 17$

Solo se puede usar si $P \nmid 17$
 $\Rightarrow P \nmid 45$,
respectivamente

Como P es primo
ambos son candidatos
a utilizar el P.T. de Fermat

$\downarrow$
Como $45 = 3^2 \cdot 5$ y $P \neq 3$.
Puedo usar PTF si $P \neq 5$

División en Casos: $P=5$, $P=17$ y $P \neq 5 \wedge P \neq 17$

Caso $P=5$: $2 \cdot 17^6 + 2 \cdot 45^{25+5-1} - 374 \stackrel{(5)}{\equiv} 2 \cdot 2^6 + 2 \cdot 0^{29} + 1 \pmod{5}$

$$2^7 + 1 \stackrel{(5)}{\equiv} 2^4 \cdot 2^3 + 1 \stackrel{(5)}{\equiv} 16 \cdot 8 + 1 \stackrel{(5)}{\equiv} 8 + 1 \stackrel{(5)}{\equiv} 9 \not\equiv 0 \pmod{5}$$

$f \not\equiv 0 \pmod{P} \Rightarrow \boxed{P=5 \text{ no es solución}}$ ✓

Caso $P=17$: $2 \cdot 17^{17+1} + 2 \cdot (45)^{17^2+17-1} - 374 \stackrel{(17)}{\equiv} 2 \cdot 0^{18} + 2 \cdot 11^{17^2+17-1} - 0$
 $2 \cdot 11^{17^2+17-1}$ es candidato a usar PTF.

Auxiliar: $v_6(17^2+17-1)$ P es primo y $P=17 \nmid 11 \Rightarrow$ Se puede usar PTF

$$17^2+17-1 \equiv (1)^2+16 \equiv 1 \pmod{6} \quad 2 \cdot 11^{17^2+17-1} \stackrel{(17)}{\equiv} 2 \cdot 11^{17^2+17-1} \stackrel{(17)}{\equiv} 2 \cdot 11^1$$

$$v_6(17^2+17-1) = 1$$

$$2 \cdot 11 \stackrel{(17)}{\equiv} 22 \stackrel{(17)}{\equiv} 5 \not\equiv 0 \pmod{17}$$

$\not\equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 6 \cdot 17 \nmid \Rightarrow P=17$ no es solución

Caso $P \neq 5$ y $P \neq 17$: averigua que $P \neq 2$ y $P \neq 3$.

$$2 \cdot 17^{P+1} + 2 \cdot 45^{P^2+P-1} - 374$$

Como P es primo y no divide a 17 ni 45, ambos miembros pueden ser abordados con PTF.

$$2 \cdot 17^{P+1} + 2 \cdot 45^{P^2+P-1} - 374 \stackrel{(P)}{\equiv} 2 \cdot 17^{v_{P-1}(P+1)} + 2 \cdot 45^{v_{P-1}(P^2+P-1)} - 374$$

Aux: $v_{P-1}(P^2+P-1)$

$$P^2+(P-1) \stackrel{(P-1)}{\equiv} P^2 \stackrel{(P-1)}{\equiv} (1)^2 \stackrel{(P-1)}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow v_{P-1}(P^2+P-1) = 1$$

$$\stackrel{(P)}{\equiv} 2 \cdot 17^2 + 2 \cdot 45^1 - 374 \stackrel{(P)}{\equiv} 294$$

Entonces, averigua $294 \stackrel{(P)}{\equiv} 0$ es decir, averigua encontrar los P divisores de 294.

~~639~~
~~317~~
~~2~~

294	2
147	3
49	7
7	7
1	✓

$$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

P podría ser 2 o 3, pero en este caso, como ya se indicó, $P \neq 2$ y $P \neq 3$.

$\therefore$ La solución es $P=7$

Sea $w \in G_9$, $w \neq 1$. Probar que $(w^{23} - w^4 + w^{19} - \bar{w} - w^{-21} + w^{12})^3$ es imaginario puro.

Propiedades Útiles: en G_9 : $w^k = w^{r_9(k)}$

$$\sum_{k=0}^8 w^k = 0$$

$$w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \bar{w} \text{ porque es } G_9$$

$$\Leftrightarrow w^{-1} = \bar{w}$$

Aux

$$w = a + bi, \quad \bar{w} = a - bi$$

$$w - \bar{w} = a + bi - a + bi = 2bi$$

$$w - \bar{w} = 2\operatorname{Im}(w)i$$

$$\begin{aligned} & (w^{23} - w^4 + w^{19} - \bar{w} - w^{-21} + w^{12})^3 \\ &= (w^5 - w^4 + w - \bar{w}^{-1} - w^6 + w^3)^3 \\ &= (w^5 - w^4 + w - w^8 - w^6 + w^3)^3 \\ \xrightarrow{\bar{w} = w^{-1}} &= (w^5 - (\bar{w})^{-1})^4 + w - (\bar{w}^{-1})^8 + w^3 - (\bar{w}^{-1})^6)^3 \\ &= (w^5 - \bar{w}^{-4} + w - \bar{w}^{-8} + w^3 - \bar{w}^{-6})^3 \\ &= (w^5 - \bar{w}^5 + w - \bar{w}^1 + w^3 - \bar{w}^3)^3 \\ &= (2\operatorname{Im}(w^5)i + 2\operatorname{Im}(w)i + 2\operatorname{Im}(w^3)i)^3 \\ &= (2i (\operatorname{Im}(w^5) + \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(w^3)))^3 \end{aligned}$$

$$= (2i)^3 \cdot \underbrace{(\operatorname{Im}(w^5) + \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(w^3))}_{\in \mathbb{R}}^3$$

$$\begin{aligned} &= 8i^3 (\operatorname{Im}(w^5) + \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(w^3))^3 \\ &= \underbrace{-8}_{\in \mathbb{R}} i \underbrace{(\operatorname{Im}(w^5) + \operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(w^3))}_{\in \mathbb{R}}^3 \end{aligned}$$

Es decir, el resultado es la unidad imaginaria multiplicada por núm. Reales.
 $\Rightarrow$ el resultado es imaginario puro

Tomás Gabriel Garagli

3b) Hallar todos los $w \in G_{40}$ que verifican $1 + w^2 = -w^8(1 + w^2)$

$$1 + w^2 = -w^8(1 + w^2) \Leftrightarrow (1 + w^2)(1 + w^8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + w^2 = 0 \\ \text{ó} \\ 1 + w^8 = 0 \end{cases}$$

Caso $1 + w^2 = 0$:

$$w^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow e^{2\theta i} = e^{(\pi + 2k\pi)i}$$

$$2\theta = \pi + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{1 + 2k}{2} \pi \quad \text{con } k \in [0, 1]$$

Completan $w = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ y $w = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$

ambos forman parte de G_{40} :

$$i^{40} = ((i)^4)^{10} = 1^{10} = 1$$

$$(-i)^{40} = ((-i)^4)^{10} = 1^{10} = 1$$

$$\boxed{w = i \quad \text{y} \quad w = -i \text{ son soluciones}}$$

Caso $1 + w^8 = 0$: $w^8 = -1$

$$w^8 = -1 \Leftrightarrow e^{8\theta i} = e^{(\pi + 2k\pi)i}$$

$$8\theta = \pi + 2k\pi$$

$$w = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{8} i}$$

Si $w \in G_{40}$: $(w^8)^5 = 1 = w^{40}$

Ahora bien son parte de G_{40} Es decir $w^{40} = 1$

sin embargo, si $w^8 = -1$ solución:

$$(w^8)^5 = (-1)^5 = -1 \neq 1$$

$$\boxed{w^8 = -1}$$

Por tanto, las soluciones de $w^8 = -1$ no forman parte de G_{40}

$$\therefore \text{ Los } w \in G_{40} \text{ que verifican la ecuación son } i \text{ y } -i$$

Tomás Gabriel Garagli

4) Sea $P(x) = 5x^5 + 4x^4 - 21x^3 - 21x^2 - 20x + 5$

Factorizar sabiendo que $(P(x) : (x^2 - 1)(x - 5)) = x^2 + x + 1$
en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + x + 1 \mid P(x)$$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 4x^4 - 21x^3 - 21x^2 - 20x + 5 \\ \underline{5x^5 + 5x^4 + 5x^3} \\ -x^4 - 26x^3 - 21x^2 - 20x + 5 \\ \underline{-x^4 - x^3 - x^2} \\ -25x^3 - 20x^2 - 20x + 5 \\ \underline{-25x^3 - 25x^2 - 25x} \\ 5x^2 + 5x + 5 \\ \underline{5x^2 + 5x + 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + x + 1) (5x^3 - x^2 - 25x + 5)$$

Por Lema de Gauss: las raíces racionales son de forma $\frac{\alpha}{\beta}$,
con $\alpha \in \text{Div}(a_0)$ y $\beta \in \text{Div}(a_n)$

En este caso $\alpha \in \text{Div}(5)$ y $\beta \in \text{Div}(5)$.

$$\text{Div}(5) = \{\pm 1, \pm 5\}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \in \left\{ \pm \frac{1}{5}, \pm 1, \pm 5 \right\}$$

Prueba entonces:

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0, \boxed{f\left(\frac{1}{5}\right) = 0} \Rightarrow (x - \frac{1}{5}) \mid f(x)$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 - x^2 - 25x + 5 \\ \underline{5x^3 - x^2} \\ -25x + 5 \\ \underline{-25x + 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} f(x) = (5x^2 - 25)(x - \frac{1}{5}) \\ P(x) = (x^2 + x + 1)(x - \frac{1}{5})(5x^2 - 25) \end{cases}$$

Ahora uso Bhaskara/Resolvente para buscar raíces de $(5x^2 - 25)$:

$$-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-25)} = \pm \frac{\sqrt{500}}{10} = \pm \frac{10\sqrt{5}}{10} = \pm \sqrt{5} \Rightarrow P(x) = (x^2 + x + 1)(x - \frac{1}{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Tengo $P(x) = 5(x^2 + x + 1)(x - \frac{1}{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

Me falta factorizar.

Uso Bhaskara / Resolvente $\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}{2}$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 1) = (x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i))(x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i))$$

En $\mathbb{C}[x]$:

$$\Rightarrow P(x) = 5 \left[x - (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \right] \left[x - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \right] (x - \frac{1}{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Para $\mathbb{R}[x]$ agrupamos los factores con raíces imaginarias:

$$P(x) = 5(x^2 + x + 1)(x - \frac{1}{5})(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Para $\mathbb{Q}[x]$ también agrupamos factores con raíces irracionales:

$$P(x) = 5(x^2 + x + 1)(x^2 - 5)(x - \frac{1}{5})$$

Muy buen examen !! Felicitaciones !!