

Tema 1

1	2	3	4
B	B	X	Z

CALIFICACIÓN
550

2do Parcial Álgebra I - martes 10 de Marzo de 2026

APELLIDO:

CARRERA: CS. Computación

NOMBRE:

LIBRETA:

Ejercicio 1. Hallar todas las soluciones $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$48a + 18b = 6$$

que satisfacen simultáneamente que $5(a + b) \equiv 4 \pmod{12}$.

Ejercicio 2. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que

$$6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28 \pmod{70}$$

Ejercicio 3. Sea $w \in G_6$, $w \neq 1$. Calcular todos los posibles valores de:

$$w^3 + \sum_{j=0}^{179} (w^{12} + w^2 + \overline{w^5} + w^{16} + w^3 + w^5 + w)^j$$

Ejercicio 4. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el polinomio

$$f = x^7 - x^4 - ax^3 + 16$$

admite a $2i$ y a una raíz cúbica de la unidad como raíces.

Para cada valor de a hallado, factorizar f como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Justifique todas sus respuestas

1) Busco todas las soluciones $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

De $48a + 18b = 6$ que satisfaga simultáneamente $5(a+b) \equiv 4(12)$

- $48a + 18b = 6$ tiene solución $\Leftrightarrow (48:18) | 6$: $6/6! \rightarrow \text{si} \Rightarrow \exists \text{ solución}$
- Busco $(48:18) \leadsto 48 = 18 \cdot 2 + 12 \Rightarrow \text{mod}(48, 18) = 6$
 $18 = 12 \cdot 1 + 6$
 $12 = 6 \cdot 2 + 0$
- SIMPLIFICO
DIVIDIENDO
POR 6 $\leadsto \frac{48a}{6} + \frac{18b}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow [8a + 3b = 1]$ $\checkmark$ MATEMÁTICA A RESOLVER

• Solución Homogénea: Busco $a, b / 8a + 3b = 0$

$$\hookrightarrow \text{A OJO} \leadsto 8(-3) + 3(8) = 0 \Rightarrow S_H = \{(-3k, 8k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

• Solución Particular: Busco $a, b / 8a + 3b = 1$

$$\hookrightarrow \text{A OJO} \text{ si } a = (-1) \text{ y } b = 3 \Rightarrow 8(-1) + 3(3) = 1 \checkmark$$

• Solución General:

$$S = \{(-3k-1, 8k+3) / k \in \mathbb{Z}\}$$

• Ahora de mi expresión Busco los $a, b / 5(a+b) \equiv 4(12)$

$$\bullet (a+b) = (-3k-1) + (8k+3) = 5k+2 = (a+b)$$

$$\bullet 5(a+b) = 5(5k+2) = [25k+10 = 5(a+b)]$$

$$9 \vee 9 \quad 5(a+b) \equiv 4(12)$$

$$\Rightarrow 25k+10 \equiv 4(12) \Leftrightarrow 25k \equiv -6(12) \Leftrightarrow 25k \equiv 6(12)$$

$$12 \nmid 25 \text{ y inverso } \rightarrow 25 = 12 \cdot 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow [k \equiv 6(12)] \leadsto \text{con estos valores de } k$$

los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen

lo pedido son $\leadsto$

$$S' = \{(-3k-1, 8k+3) / k \equiv 6(12)\}$$

OTA



2)

Busco todos los $a \in \mathbb{Z} / 6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28 \pmod{70}$

• noto que 70 está compuesto por $\rightarrow 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

• me fabrico un sistema con los primos que componen al módulo ✓

$$\begin{cases} 6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28(2) \\ 6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28(5) \\ 6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28(7) \end{cases}$$

obs: $6 \equiv 0(2) \quad 4 \equiv 0(2)$

obs 2: • como $5 \nmid 4 \Rightarrow 5 \nmid 4^k \Rightarrow 5 \nmid 4^{132}$
 puedo usar PTF $a^{p-1} \equiv 1(p)$
 • como a es par $a \equiv 2k$
 $\Rightarrow 5 \nmid a \Rightarrow a^p \equiv a(p)$ si PTF

• simplifico para poder usar el TCR ✓

• $6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28(2) \xrightarrow{\text{obs}} 0 + a^5 + a \equiv 0(2) \xrightarrow{\text{por prop de primos}} [a^5 \equiv 0(2)]$
 $\Rightarrow$ si p primo $\Rightarrow a \equiv 0(2)$

• $6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28(5) \xrightarrow{6 \cdot 15 \equiv 3 \pmod{5}} a^{13} + 2a + 4^{132} \equiv 3(5)$
 $\xrightarrow{\text{PTF}} a^{13} + 2a + 1^{33} \equiv 3(5) \xrightarrow{13 \equiv 4 \cdot 3 + 1} a^{13} + 2a + 1^{33} \equiv 3(5)$
 $\xrightarrow{\text{PTF}} a^{13} + 2a \equiv 2(5) \xrightarrow{2 \cdot 15 \equiv 1 \pmod{5}} (a^4)^3 \cdot a + 2a \equiv 2(5) \xrightarrow{\text{PTF}} a + 2a \equiv 2(5)$
 $\xrightarrow{2 \cdot 15 \equiv 1 \pmod{5}} 3a \equiv 2(5) \xrightarrow{2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}} 2 \cdot 3a \equiv 2 \cdot 2(5) \xrightarrow{6 \cdot 15 \equiv 3 \pmod{5}} 6a \equiv 4(5) \xrightarrow{6 \cdot 15 \equiv 3 \pmod{5}} [a \equiv 4(5)]$

• $6a^{13} + 7a^5 + 4^{132} \equiv 28(7) \xrightarrow{6 \cdot 7 \equiv 0 \pmod{7}} a^{13} + 0 + 4^{132} \equiv 0(7)$
 $\xrightarrow{\text{PTF}} a^{13} + 4^{132} \equiv 0(7) \xrightarrow{13 \equiv 1 \pmod{7}} (a^6)^2 \cdot a + (4^6)^{22} \equiv 0(7) \xrightarrow{\text{PTF}} a + 1 \equiv 0(7) \xrightarrow{a+1 \equiv 0(7)} a \equiv -1(7)$
 $\xrightarrow{a+1 \equiv 0(7)} [a \equiv 6(7)]$

• El sistema me queda

$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0(2) \\ a \equiv 4(5) \\ a \equiv 6(7) \end{cases}$ son coprimos $2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ el TCR no dice que si $\exists$ sol $\Rightarrow a \equiv x_0(70)$

• Resuelvo • $a \equiv 4(5) \xrightarrow{a=5q+4} a=5q+4$ • $a \equiv 6(7) \xrightarrow{a=5q+4} 5q+4 \equiv 6(7) \xrightarrow{5q \equiv 2(7)} 5q \equiv 2(7)$
 $\Rightarrow a = 5q + 4 = 5(7l + 6) + 4 = 35l + 30 + 4 \Rightarrow a = 35l + 34$
 $\Rightarrow 5q \equiv 2(7) \xrightarrow{5q \equiv 2(7)} 15q \equiv 6(7) \xrightarrow{15q \equiv 6(7)} q \equiv 6(7)$
 $\Rightarrow q = 7l + 6$

• $a \equiv 0(2) \xrightarrow{a=35l+34} 35l + 34 \equiv 0(2)$
 $\xrightarrow{\text{obs: } 35 \equiv 1(2), 34 \equiv 0(2)} l \equiv 0(2) \Rightarrow [l = 2k]$

$\Rightarrow a = 35l + 34 = 35(2k) + 34 = 70k + 34 \Rightarrow [a \equiv 34(70)]$

Verifico

$\Rightarrow \begin{cases} 34 \equiv 0(2) \rightarrow 34 = 2 \cdot 17 + 0 \checkmark \\ 34 \equiv 4(5) \rightarrow 34 = 5 \cdot 6 + 4 \checkmark \\ 34 \equiv 6(7) \rightarrow 34 = 7 \cdot 4 + 6 \checkmark \end{cases}$

conclusion: todos los a^2 que after el cambio son del TCR

$\Rightarrow [a \equiv 34(70)]$ ITA