

1	2	3	4	Nota
B	B	B	B	10

APELLIDO Y NOMBRE: Pérez Natalia

N° DE LIBRETA: [REDACTED]

CARRERA: Lic. Ciencias de la Computación

Corr: Gonzalo

TURNO: A 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☒ 14 a 19hs. ☐ 17 a 22hs. ☐

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Segundo parcial - 02/07/2024

Ejercicio 1. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} 3a \equiv 12 & (\text{mód } 24) \\ a \equiv 10 & (\text{mód } 30) \\ 20a \equiv 50 & (\text{mód } 125) \end{cases}$$

Ejercicio 2. Hallar todos los primos $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$3^{p^2+3} \equiv -84 \pmod{p} \quad \text{y} \quad (7p+8)^{2024} \equiv 4 \pmod{p}.$$

Ejercicio 3. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ definida como:

$$f_1 = X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 11X^2 - 20 \quad \text{y} \quad f_{n+1} = (X+2)^2 f'_n + 3f_n \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que -2 es raíz doble de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.

a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (positivo) para los cuales el polinomio

$$f = X^5 + \frac{n}{3}X^4 - \frac{8}{3}X^3 + \frac{11}{3}X^2 - X$$

tiene una raíz entera no nula.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar el polinomio f obtenido como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Justifique todas sus respuestas.

$$\text{Ej 1)} \begin{cases} 3a \equiv 12 \pmod{24} & \textcircled{1} \\ a \equiv 10 \pmod{30} & \textcircled{2} \\ 20a \equiv 50 \pmod{125} & \textcircled{3} \end{cases}$$

R= ① $3a \equiv 12 \pmod{24}$ representa la ecuación diofántica

$$3a + 24b = 12 \quad (3:24) = (3:3 \cdot 2^3) = 3 \text{ y } 3|12$$

$\Rightarrow$ El sistema tiene solución y la consigo resolviendo el sistema equivalente: $\frac{3}{3}a + \frac{24}{3}b = \frac{12}{3} \Leftrightarrow a + 8b = 4$ ✓

Busco una solución y a ojo veo que $a = -4$, $b = 1$ es solución.
 $\Rightarrow -4 \equiv 4 \pmod{8} \Rightarrow a \equiv 4 \pmod{8}$

$$\textcircled{2} a \equiv 10 \pmod{30}$$

③ $20a \equiv 50 \pmod{125}$ representa la ecuación diofántica

$$20a + 125b = 50 \quad (20:125) = (2^2 \cdot 5 : 5^3) = 5 \text{ y } 5|50$$

$\Rightarrow$ El sistema tiene solución y la consigo resolviendo el sistema equivalente: $\frac{20}{5}a + \frac{125}{5}b = \frac{50}{5} \Leftrightarrow 4a + 25b = 10$

A ojo encuentro una solución: $a = -10$, $b = 2$

$$\Rightarrow 4(-10) \equiv 10 \pmod{25} \Rightarrow a \equiv -10 \pmod{25} \Leftrightarrow a \equiv 15 \pmod{25} \quad \checkmark$$

mi nuevo sistema es:

$$\begin{cases} a \equiv 4 \pmod{8} \\ a \equiv 10 \pmod{30} \\ a \equiv 15 \pmod{25} \end{cases} \begin{cases} \text{No son} \\ \text{coprimos} \\ \text{dos a dos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 4 \pmod{8} \\ a \equiv 10 \pmod{2} \\ a \equiv 10 \pmod{5} \\ a \equiv 10 \pmod{3} \\ a \equiv 15 \pmod{25} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} a \equiv 4 \pmod{8} \\ a \equiv 0 \pmod{2} \\ a \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \quad * 2|8 \text{ y } 4 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow \text{sólo me quedo con } a \equiv 4 \pmod{8} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a \equiv 1 \pmod{3} \\ a \equiv 15 \pmod{25} \end{cases} \quad * 5|25 \text{ y } 15 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow \text{sólo me quedo con } a \equiv 15 \pmod{25} \quad \checkmark$$

Resuelvo mi nuevo sistema con el teorema Chino del resto:

① Por esta ecuación se tiene $a = 8K + 4$

③ Se que $a = 25K + 15$ y por ① tengo que $a = 25K + 15 \equiv 4 \pmod{8}$

$$\Leftrightarrow 25K \equiv -11 \pmod{8} \Leftrightarrow 25K \equiv 5 \pmod{8} \Leftrightarrow K \equiv 5 \pmod{8} \Leftrightarrow K = 8q + 5 \quad \checkmark$$

$$a = 25(8q + 5) + 15 = 200q + 140$$

$$\textcircled{2} \text{ Se que } a = 200q + 140 \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 2q + 2 \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow -q \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow q \equiv -2 \pmod{3} \Leftrightarrow q \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow q = 3j + 1 \quad \checkmark$$

$$a = 200(3j + 1) + 140 = 600j + 340 \Leftrightarrow a \equiv 340 \pmod{600} \quad \checkmark$$

Rta: los $a \in \mathbb{Z}$ que satisfacen el sistema son todos los $a \equiv 340 \pmod{600}$

Ej 2) $3^{p^2+3} \equiv -84 (p)$ y $(7p+8)^{2024} \equiv 4 (p)$
 R = estudio los casos por separado.
 ① 3^{p^2+3} : Si $p|3 \Rightarrow p=3 \Rightarrow 3^{p^2+3} \equiv 0 (p)$ y $0 \equiv -84 (3)$ ✓

$p \nmid 3 \Rightarrow 3^{p-1} \equiv 1 (p)$ (Por el pequeño teorema de Fermat, ya que $(3:p)=1$).
 Estudio p^2+3 modulo $p-1$, ya que como colorario del PTF tengo
 $p \equiv 1 (p-1) \Rightarrow p^2+3 \equiv 1^2+3 \equiv 4 (p-1)$ que si $n \equiv m (p-1) \Rightarrow a^n \equiv a^m (p)$
 $\Rightarrow 3^{p^2+3} \equiv 3^4 (p) \Rightarrow 3^4 \equiv 81 \equiv -84 (p) \Leftrightarrow 165 \equiv 0 (p)$ y $165 = 5 \cdot 3 \cdot 11$
~~Entonces $p \in \{3, 5, 11\}$~~ $p \in \{3, 5, 11\}$ ✓

② $(7p+8)^{2024} \equiv 4 (p)$

• Si $p=5$: $7p+8=43$, como $(5:43)=1$, por PTF $43^4 \equiv 1 (5)$
 Uso el colorario del PTF del paso anterior:

$$2024 \equiv 0 (4) \Rightarrow 43^{2024} \equiv 43^0 \equiv 1 (5) \Rightarrow \boxed{p \neq 5}$$
 ✓

• Si $p=11$: $7p+8=85$, como $(11:85)=1$, por PTF $85^{10} \equiv 1 (11)$
 Uso el colorario del PTF del paso anterior:

$$2024 \equiv 4 (10) \Rightarrow 85^{2024} \equiv 85^4 (11) \text{ y } 85^4 \equiv 4 (11) \Rightarrow \boxed{p=11}$$
 ✓

~~Entonces los únicos primos p que cumplen ambas condiciones son $p=3$ y $p=11$~~

• Si $p=3$: $7p+8=29$, como $(3:29)=1$, por PTF $29^2 \equiv 1 (3)$
 Uso el colorario del PTF del paso anterior:

$$2024 \equiv 0 (2) \Rightarrow 29^{2024} \equiv 29^0 \equiv 1 (3) \text{ y } 1 \equiv 4 (3) \Rightarrow \boxed{p=3}$$

Rta: Los primos $p \in \mathbb{N}$ que cumplen ambas condiciones son 3 y $11 \Rightarrow p \in \{3, 11\}$

g3) Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ la sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[x]$ definida como:

$f_1 = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20$ y $f_{n+1} = (x+2)^2 f'_n + 3f_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Probar que -2 es raíz doble de $f_n \forall n \in \mathbb{N}$.

-2 es raíz doble de $f_n \Leftrightarrow (x+2)^2 \mid f_n$ y $(x+2)^3 \nmid f_n$
además $(x+2) \mid f'_n$ y $(x+2)^2 \nmid f'_n$

Lo prueba por inducción: $P(n) = "multi(-2, f_n) = 2"$

Estudio $P(1)$ Caso base: $f_1 = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 11x^2 - 20$, ~~se ve~~

$$f_1(-2) = (-2)^5 + 3(-2)^4 + 5(-2)^3 + 11(-2)^2 - 20 = 0 \Rightarrow \text{Por Gauss se que } -2 \text{ es raíz de } f_1$$

$$\text{Se que } multi(-2, f_1) = 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} f_1(-2) = 0 \\ f'_1(-2) = 0 \\ f''_1(-2) \neq 0 \end{matrix}$$

↓
Raíz
doble (2)

lo sabes porque
 $f_1(-2)$ te dió 0.

Derivo:

$$f'_1 = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 22x \quad \text{y} \quad f'_1(-2) = 0$$

Derivo:

$$f''_1 = 20x^3 + 36x^2 + 30x + 22 \quad \text{y} \quad f''_1(-2) = -54 \neq 0$$

$$\Rightarrow multi(-2, f_1) = 2 \Rightarrow P(1) = V.$$

Paso inductivo: Sea $h \in \mathbb{N}$, $P(h) = V$, quiero ver que $P(h+1)$ también vale.

H.I: $P(h) = V$.

$$f_{h+1} = (x+2)^2 f'_h + 3f_h \quad \text{Se que } \xrightarrow{\text{por H.I}} (x+2)^2 \mid f_h \Rightarrow (x+2)^2 \mid 3f_h$$

Además, $(x+2)^2 \mid (x+2)^2 f'_h$
Como divide a ambos sumandos $\Rightarrow$ Divide a la suma

$$\Rightarrow (x+2)^2 \mid (x+2)^2 f'_h + 3f_h \Rightarrow (x+2)^2 \mid f_{h+1}$$

Ahora veamos que $(x+2)^3$ no divide a f_{h+1} :

$$\text{Se que por H.I, } (x+2) \mid f'_h \Rightarrow (x+2)(x+2)^2 \mid (x+2)^2 f'_h$$

$$\Rightarrow (x+2)^3 \mid (x+2)^2 f'_h$$

$$\text{Además, se por H.I que } (x+2)^3 \nmid f_h \Rightarrow (x+2)^3 \nmid 3f_h$$

Como divide un sumando y al otro no lo divide, entonces
puedo afirmar que no divide a la suma.

$$\Rightarrow (x+2)^3 \nmid (x+2)^2 f'_h + 3f_h \Rightarrow (x+2)^3 \nmid f_{h+1}$$

$$\Rightarrow \text{Tengo que } (x+2)^2 \mid f_{h+1} \text{ y } (x+2)^3 \nmid f_{h+1} \Rightarrow multi(2, f_{h+1}) = 2$$

$$\Rightarrow P(h+1) = "multi(-2, f_{h+1}) = 2" = V$$

Tengo el caso base $P(1) = V$ y el paso inductivo $P(h) = V \Rightarrow P(h+1) = V$

$\Rightarrow$ Por el principio de inducción, queda probado
 $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$ ($P(n) = V \forall n \in \mathbb{N}$), es decir, $multi(-2, f_n) = 2$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Ej 4) a) Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el polinomio $f = x^5 + \frac{n}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x$

tiene una raíz entera no nula.

R = Busco las raíces $\mathbb{Z}$ a través del método de Gauss ($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$)

~~Me dice TODAS las posibles raíces $\in \mathbb{Q}$~~

~~Me dice TODAS las posibles raíces $\in \mathbb{Q}$~~

$f = x(x^4 + \frac{n}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1)$, multiplico por 3 para tener coeficientes en $\mathbb{Z}$. (No altero las raíces).

$3f = x(3x^4 + nx^3 - 8x^2 + 11x - 3)$ mis raíces son de la forma $\frac{p}{q}$ con

las combinaciones enteras son: $q = 1, 3; p = \pm 1, \pm 3$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3$. Busco los n :

$$f(1) = 1^5 + \frac{n}{3} \cdot 1^4 - \frac{8}{3} + \frac{11}{3} - 1 = \frac{n+3}{3} = 0 \Leftrightarrow n = -3 \notin \mathbb{N} \Rightarrow 1 \text{ no es raíz.}$$

$$f(-1) = -1 + \frac{n}{3} + \frac{8}{3} + \frac{11}{3} - 1 = \frac{n+19}{3} = 0 \Leftrightarrow n = -19 \notin \mathbb{N} \Rightarrow -1 \text{ no es raíz.}$$

$$f(3) = 243 + 27n - 72 + 33 - 3 = 27n + 201 = 0 \Leftrightarrow 27n = -201 \Leftrightarrow n = -\frac{201}{27} \notin \mathbb{N} \Rightarrow 3 \text{ no es raíz}$$

$$f(-3) = -243 + 27n + 72 + 33 + 3 = 27n - 135 = 0 \Leftrightarrow 27n = 135 \Leftrightarrow n = 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow -3 \text{ es raíz } \in \mathbb{Z}$$

Rta: El único valor de $n \in \mathbb{N}$ para el que cumple que f tiene una raíz entera no nula es $n = 5$.

b) Para el o los valores hallados en el ítem (a), factorizar f como producto de irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

R = Del ítem a, tengo que $f = x^5 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x$ y sé que -3 es raíz de f (es la raíz entera)

$\Rightarrow (x+3) \mid f \Rightarrow$ Divide f por $(x+3)$

$$\begin{array}{r} x^5 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x \\ -x^5 - 3x^4 \\ \hline -\frac{11}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x \\ +\frac{44}{3}x^4 + 4x^3 \\ \hline \frac{33}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^2 - x \\ -\frac{33}{3}x^3 - 11x^2 \\ \hline \frac{22}{3}x^2 - x \\ -\frac{44}{3}x^2 - \frac{44}{3}x \\ \hline \frac{22}{3}x^2 - x - \frac{44}{3}x^2 - \frac{44}{3}x \\ \hline -\frac{22}{3}x^2 - \frac{43}{3}x \\ +\frac{44}{3}x^2 + \frac{44}{3}x \\ \hline \frac{22}{3}x^2 - \frac{43}{3}x + \frac{44}{3}x^2 + \frac{44}{3}x \\ \hline \frac{66}{3}x^2 - \frac{43}{3}x + \frac{88}{3}x^2 + \frac{88}{3}x \\ \hline \frac{154}{3}x^2 - \frac{43}{3}x + \frac{88}{3}x^2 + \frac{88}{3}x \\ \hline \frac{154}{3}x^2 - \frac{43}{3}x + \frac{88}{3}x^2 + \frac{88}{3}x \\ \hline 0 \end{array}$$

Contas AUX:

$$\begin{array}{l} \frac{5}{3} - 3 = \frac{5}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{4}{3} \quad \left| \quad \frac{11}{3} - 4 = \frac{11}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{1}{3} \right. \\ -\frac{8}{3} + 4 = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3} \quad \left| \quad \frac{11}{3} - 4 = \frac{11}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{1}{3} \right. \end{array}$$



Continuación Ej 4) $f = (x+3)(x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x)$

Busco raíces de g :

Pruebo con -3 , $g(-3) = 81 + 36 + 12 + 1 = 130 \neq 0$

$g = x(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3})$ Busco raíces racionales con Gauss del polinomio h .

$3h = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

Multiplico por 3 para tener coeficientes reales (no altera las raíces)

Mis raíces son de la forma $\frac{p}{q}$, con $p = \pm 1$ y $q = 1, 3$.

$\frac{p}{q} = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -1$ $\rightarrow$ 1 y -1 ya vi que no son raíz en ítem (a).

$h(\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow$ Divide h por $(x - \frac{1}{3})$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & x - \frac{1}{3} \\ \hline x^3 + \frac{1}{3}x^2 & x^2 - x + 1 \end{array}$$

$f = (x+3)x(x - \frac{1}{3})(x^2 - x + 1)$

Por último, uso resolvente para tener las raíces de $x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{r|l} -x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} & \\ \hline +x^2 - \frac{1}{3}x & \end{array}$$

$w/w = -3$ $\rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
 $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{1}{3} & \\ \hline -x + \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

$f = (x+3)x(x - \frac{1}{3})(x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$

Factorización en $\mathbb{C}[x]$: $f = x(x+3)(x - \frac{1}{3})(x - (\frac{1+\sqrt{3}i}{2}))(x - (\frac{1-\sqrt{3}i}{2}))$

$\rightarrow$ Irreducible, porque tiene

5 raíces ~~no racionales~~ y las raíces son irreducibles por ser de grado 1. (las raíces están en $\mathbb{C}$)

Factorización en $\mathbb{R}[x]$: $f = x(x+3)(x - \frac{1}{3})(x^2 - x + 1)$

3 raíces grado 1 irreducibles

Irreducible por ser de grado 2 y no tener raíces en $\mathbb{R}$ (sus raíces no son reales).

Factorización en $\mathbb{Q}[x]$: $f = x(x+3)(x - \frac{1}{3})(x^2 - x + 1)$

Es la misma factorización que en $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Irreducible por ser de grado 2 y no tener raíces en $\mathbb{Q}$ (sus raíces no son racionales).