

1	2	3	4
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{B}^-$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{B}$

CALIFICACIÓN
7.00

Final integrador Álgebra I - viernes 20 de Marzo

APELLIDO:

CARRERA: CS. Computación

NOMBRE:

LIBRETA:

Ejercicio 1.

1. Demostrar que la relación en los números naturales $\mathbb{N}_{\geq 0}$ dada por aRb si y sólo si a divide a b es una relación de orden. ¿Qué pasa en los números enteros?
2. Demostrar que todo número entero $n \geq 2$ es producto de primos. (No hace falta demostrar la unicidad.)

Ejercicio 2.

1. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra FINANCIAMIENTO?
2. ¿Cuántos de estos anagramas contienen la palabra CANA?

Ejercicio 3. Sea $\omega \in G_5$ una raíz quinta de unidad distinta de 1. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que cumplen simultáneamente las siguientes dos condiciones.

$$(\omega^{-4})^{35} + \bar{\omega}^{143} + \omega^{-16} + \omega^{623} + \omega^{(8a^{67}+12)} = 0$$

$$a \equiv 6 \pmod{11}$$

Ejercicio 4. Factorizar el polinomio $f = X^5 - 8X^4 + 20X^3 - 22X^2 + 19X - 14$ en $\mathbb{C}[X]$, en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{Q}[X]$ sabiendo que i es raíz de f .

Justifique todas sus respuestas

1) ^(1.1) $aRb \Leftrightarrow a|b$ en los naturales $\mathbb{N}_{\geq 0}$

• quiero demostrar que R es una relacion de orden

↳ una relacion de orden debe cumplir las

siguientes condiciones

- REFLEXIVA $\rightarrow aRa \forall a \in A$

- Antisimetrica $\rightarrow aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b \forall a, b \in A$

- transitiva $\rightarrow aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \forall a, b, c \in A$

• Voy a demostrar que las condiciones para ser relacion de orden

$1=k \Rightarrow a=a$

$a=k \cdot a \Rightarrow a$ es un multiplo de si mismo

$\forall a \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

Por lo tanto es reflexiva

↳ REFLEXIVA:

$aRa \Leftrightarrow a|a$

$\rightarrow$ si $a|a$

Antisimetrica:

$aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b \forall a, b \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

• $aRb \Leftrightarrow a|b$

$\rightarrow$ si $a|b$, $b=k \cdot a$ y $a \leq b$

• $bRa \Leftrightarrow b|a$

si $b|a \Rightarrow a=k \cdot b$ y $b \leq a$

porque en los naturales un numero mas grande que el otro no puede ser divisor

↳ Como ambas deben cumplirse

$[b=k \cdot a = a=k \cdot b]$

$\Rightarrow k \cdot a = k \cdot b \Rightarrow a=b$

y si $a \leq b \leq a \Rightarrow a=b$

que la relacion es Antisimetrica

transitiva:

~~aRb~~ ~~bRa~~

$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

como deben cumplirse ambas en simultaneo

• $aRb \Leftrightarrow a|b \rightarrow b=k \cdot a$ y $a \leq b$

• $bRc \Leftrightarrow b|c \rightarrow c=k \cdot b$ y $b \leq c$

$[a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c]$

esto es la propiedad de la divisibilidad y esto es valido para todos los naturales

• Por lo visto:

en estas 3 condiciones concluimos que la relacion

$\rightarrow aRb \Leftrightarrow a|b$

es una relacion de orden

PTA

2) Financiamiento

↳ F i N A N c i A M i E N T O tiene 14 letras ✓
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

- Sabiendo que puedo ocupar 1 de los lugares con 14 opciones posibles

Ahora debo dividir por las letras repetidas

↳ i → se repite 3 veces

N → se repite 3 veces

A → se repite 2 veces

~~las repetidas~~

⇒

LA cantidad de Anagramas que tienen son

$$\hookrightarrow \left[\frac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \right] \text{ rta ✓}$$

Busco cuantos de estos anagramas contienen la palabra CANA

↳ VOY A FIJAR "CANA" en los espacios disponibles

C A N A
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Por lo visto → de las 14 letras posibles

solo tengo 10, porque 4 quedan fijas

↳ mis letras sin usar son ~~F~~ ~~i~~ ~~N~~ ~~A~~ ~~M~~ ~~i~~ ~~E~~ ~~N~~ ~~T~~ ~~O~~

Entonces, tengo 10 letras posibles
+ Busco las repetidas

i → 2 veces

N → 2 veces

Entonces, la cantidad de Anagramas que cumplen lo pedido son

$$\left[\frac{10!}{2! \cdot 2!} \right] \text{ rta ✓}$$

4) BUSCO FACTORIZAR F UTILIZANDO el dato i RAÍZ

$$F = x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 22x^2 + 19x - 14$$

• Como i es raíz de F y F tiene coeficientes reales
 $\Rightarrow -i$ también es raíz

Sabiendo que i y -i son raíces $\rightarrow (x+i)(x-i)$

~~Pr~~ $\Rightarrow (x^2+1) \mid F$

VOY A DIVIDIR A F POR (x^2+1)

$$\begin{array}{r}
 x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 22x^2 + 19x - 14 \quad \overline{) \quad x^2+1} \\
 - (x^5 + 0x^4 + x^3 + 0x^2 + 0x + 0) \quad [x^3 - 8x^2 + 19x - 14] \\
 \hline
 - 8x^4 + 19x^3 - 22x^2 + 19x - 14 \\
 - (-8x^4 + 0x^3 - 8x^2 + 0x + 0) \\
 \hline
 19x^3 - 14x^2 + 19x - 14 \\
 - (19x^3 + 0x^2 + 19x + 0) \\
 \hline
 -14x^2 - 14 \\
 - (-14x^2 - 14) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

De este cociente VOY A EXTRAER INFORMACIÓN

• BUSCO RAÍCES de $x^3 - 8x^2 + 19x - 14$ mediante Lema de GAUSS
 $\underline{d} \rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\} \Rightarrow \frac{d}{a} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$
 $\underline{p} \rightarrow \{1\}$

Pruebo PARA SABER si algunos de mis candidatos es raíz

si $x=2 \rightarrow (2)^3 - 8(2)^2 + 19(2) - 14 = 8 - 32 + 38 - 14 = 46 - 46 = 0$

$\Rightarrow 2$ es raíz $\rightarrow (x-2) \mid x^3 - 8x^2 + 19x - 14$ VOY A DIVIDIR A
 $x^3 - 8x^2 + 19x - 14$ POR $(x-2)$
 USANDO RUFFINI

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 14 \quad ; \quad (x-2)^{7/10} = 2$$

• APLICO RUFFINI:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 19 & -14 \\ 2 & & 2 & -12 & 14 \\ \hline & 1 & -6 & 7 & 0 \end{array}$$

$\hookrightarrow x^2 - 6x + 7$

$\hookrightarrow$ Por Ruffini:

$$\hookrightarrow x^3 - 8x^2 + 19x - 14 = (x-2)(x^2 - 6x + 7)$$

Ahora 2. BUSCO LAS RAÍCES DE $x^2 - 6x + 7$ UTILIZANDO LA RESOLVENTE

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$\hookrightarrow \begin{cases} r_1 = 3 + \sqrt{2} \\ r_2 = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$

Entonces $(x^2 - 6x + 7) = (x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$

• HASTA AHORA tengo $\rightarrow$ 5 raíces halladas:

$$\hookrightarrow F = x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 22x^2 + 19x - 14 = (x^2 + 1)(x^3 - 8x^2 + 19x - 14)$$

$$\text{Y } (x^2 + 1) = (x - i)(x - (-i)) \quad \text{grado 1}$$

$$(x^3 - 8x^2 + 19x - 14) = (x - 2)(x^2 - 6x + 7) = (x - 2)(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$$

• Por lo

visto: como el

teorema fundamental del Álgebra me dice que un Polinomio de grado n , tiene n raíces contando multiplicidades

Y como tengo 5 raíces halladas

VOY A FACTORIZAR EN $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ Y $\mathbb{Q}[x]$

En $\mathbb{C}[x]$ $F = (x - i)(x - (-i))(x - 2)(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$

En $\mathbb{R}[x]$ $F = (x^2 + 1)(x - 2)(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$

$\hookrightarrow$ Irreducible en $\mathbb{R}[x]$ Por ser de grado 2 y no tener raíces reales

En $\mathbb{Q}[x]$ $F = (x^2 + 1)(x - 2)(x^2 - 6x + 7)$

Irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ Por ser de grado 2 y no tener raíces racionales